Capítulo 1
El radical de Jacobson

1.1. Anillos y módulos simples

Un **anillo** es un grupo abeliano R con una multiplicación asociativa $(x,y) \mapsto xy$ tal que $(x+y)z = xz+yz$ y $x(y+z) = xy+xz$ para todo $x,y,z \in R$. Si existe un elemento $1 \in R$ tal que $x1 = 1x = x$ para todo $x \in R$, el anillo se dirá **unitario**. Un **subanillo** S de R es un subgrupo aditivo de R cerrado por multiplicación.

Ejemplo 1.1.1. $2\mathbb{Z} = \{2m : m \in \mathbb{Z}\}$ es un ejemplo de anillo sin unidad.

Un **ideal a izquierda** (resp. **a derecha** es un subanillo I de R tal que $rI \subseteq I$ (resp. $Ir \subseteq I$) para todo $r \in R$. Un **ideal** (o también ideal bilátero) de R es un subanillo I de R que es ideal a izquierda y a derecha de R.

Si I y J son ideales de R entonces la suma $I+J = \{x+y : x \in I, y \in J\}$ y la intersección $I \cap J$ son ideales de R. El producto IJ, que se define como el subgrupo aditivo generado por $\{xy : x \in I, y \in J\}$, es también un ideal de R.

Ejemplo 1.1.2. Si R es un anillo, el conjunto $Ra = \{xa : x \in R\}$ es un ideal a izquierda de R, $aR = \{ax : x \in R\}$ es un ideal a derecha de R y RaR, que se define como el subgrupo aditivo generado por $\{xay : x,y \in R\}$, es un ideal de R.

Ejemplo 1.1.3. Si R es unitario, Ra es el ideal a izquierda generado por a, aR es el ideal a derecha generado por A y RaR es el ideal generado por a. Si R no es unitario, el ideal a izquierda generado por a es $Ra + \mathbb{Z}a$, el ideal a derecha generado por a es $aR + \mathbb{Z}a$ y el ideal generado por a es $RaR + Ra + aR + \mathbb{Z}a$.

Definición 1.1.4. Un anillo R se dice **simple** si $R^2 \neq 0$ y los únicos ideales de R son 0 y R.

Observación 1.1.5. Si R es unitario, entonces la condición $R^2 \neq 0$ siempre se satisface (pues por ejemplo $1 \in R^2$).

Ejemplo 1.1.6. Todo anillo de división es simple.

Sea S un anillo unitario. Recordemos que $M_n(S)$ es el anillo de matrices cuadradas con entradas en S. Si $A = (a_{ij}) \in M_n(S)$ y E_{ij} es la matriz dada por $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$, entonces

$$E_{ij}AE_{kl} = a_{jk}E_{il} \tag{1.1}$$

eq:trick

para todo $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$.

Ejemplo 1.1.7. Si D un anillo de división entonces $M_n(D)$ es simple. En efecto, sea I un ideal no nulo de $M_n(D)$ y sea $A = (a_{ij}) \in I$. Sean j, k tales que $a_{jk} \neq 0$. Entonces, por (1.1), $a_{jk}E_{il} \in I$ para todo $i, l \in \{1, \dots, n\}$. Luego

$$\lambda E_{il} = (\lambda a_{jk}^{-1})E_{ii}(a_{jk}E_{il}) \in I$$

para todo $\lambda \in D$ y para todo $i, l \in \{1, \dots, n\}$. Luego $I = M_n(S)$.

Sea R un anillo, no necesariamente unitario. Recordemos que un **módulo** sobre R (o R-módulo) es un grupo abeliano $(M, +)$ junto con una función $R \times M \to M$, $(r, m) \mapsto rm$, tal que $(r + s)m = rm + sm$, $r(m + n) = rm + rs$, $r(sm) = (rs)m$ para todo $r, s \in R$, $m, n \in M$. Si R posee elemento neutro 1 y vale que $1m = m$ para todo $m \in M$, el módulo M se dice **unitario**.

Definición 1.1.8. Sea R un anillo y sea M un R-módulo. Diremos que M es **simple** si $RM \neq 0$ y los únicos submódulos de M son 0 y M.

Observación 1.1.9. Si M es unitario, $M = RM \neq 0$.

Observación 1.1.10. Si M es un módulo simple, entonces $M \neq 0$.

lemma:simple **Lema 1.1.11.** *Sea M un R-móduo no nulo. Entonces M es simple si y sólo si $M = Rm$ para todo $0 \neq m \in M$.*

Demostración. Supongamos que M es simple. Sea $m \neq 0$. Como Rm es un submódulo del simple M, $Rm = 0$ o bien $Rm = M$. Sea $N = \{n \in M : Rn = 0\}$. Como N es un submódulo del simple M y $RM \neq 0$, $N = 0$. Luego $Rm = M$ pues $m \neq 0$. Supongamos que $M = Rm$ para todo $m \neq 0$. Sea L un submódulo no nulo de M y sea $0 \neq x \in L$. Entonces $M = L$ pues $M = Rx \subseteq L$.

Ejemplo 1.1.12. Sea D un anillo de división y sea $V \neq 0$ un espacio vectorial (sobre D). Si $R = \mathrm{End}_D(V)$ entonces V es un R-módulo simple con $fv = f(v)$, $f \in R$. $v \in V$.

Para ver que V es simple como R-módulo basta ver que $Rv = V$ para todo $v \neq 0$. Sean $v, w \in V$, $v \neq 0$. Al completar $v \neq 0$ a una base de V, vemos que existe $f \in R$ tal que $f(v) = w$. Luego V es simple.

exa:I_k **Ejemplo 1.1.13.** Sea $n \geq 2$. Si D es un anillo de división y $R = M_n(D)$, entonces cada $I_k = \{(a_{ij}) \in R : a_{ij} = 0 \text{ para } j \neq k\}$ es un R-módulo (es más, es un R-módulo isomorfo a D^n). Luego $M_n(D)$ es simple como anillo pero no como $M_n(D)$-módulo.

Definición 1.1.14. Sea R un anillo. Un ideal a izquierda L de R se dice **minimal** si $L \neq 0$ y L no contiene propiamente otros ideales a izquierda de R.

Ejemplo 1.1.15. Sea D un anillo de división y sea $R = M_n(D)$. Entonces $L = RE_{11}$ es un ideal a izquierda minimal.

Similarmente se definen ideales a derecha minimales e ideales minimales.

Ejemplo 1.1.16. Sea L un ideal a izquierda no nulo. Si $RL \neq 0$, entonces L es minimal si y sólo si L es simple como módulo.

Definición 1.1.17. Un ideal a izquierda L de un anillo R se dice **regular** si existe $e \in R$ tal que $r - re \in L$ para todo $r \in R$.

Similarmente, un ideal a derecha I se dice **regular** si existe $e \in R$ tal que $r - er \in I$ para todo $r \in R$.

Observación 1.1.18. Si R es un anillo unitario, todo ideal a izquierda (resp. a derecha) es regular.

Ejercicio 1.1.19. Un ideal I de un anillo R se dice maximal si $I \neq M$ e I no está contenido propiamente en ningún ideal de R. Demuestre que todo anillo unitario contiene un ideal maximal.

proposition:R/I

Proposición 1.1.20. *Sea R un anillo y M un R-módulo. Entonces M es simple si y sólo si $M \simeq R/I$ para algún ideal a izquierda I maximal y regular.*

Demostración. Supongamos que M es simple, entonces $M = Rm$ para algún $m \neq 0$ por el lema 1.1.11. Como $\phi : R \to M$, $r \mapsto rm$, es un epimorfismo de R-módulos, por el primer teorema de isomorfismos, $M \simeq R/\ker\phi$.

Veamos que el ideal a izquierda $I = \ker\phi$ es maximal. Por el teorema de la correspondencia, como M es simple, I es maximal (pues todo ideal a izquierda J tal que $I \subseteq J$ da un submódulo de R/I).

Veamos que I es regular. Como $M = Rm$, existe $e \in R$ tal que $m = em$. Si $r \in R$ entonces $r - re \in I$ pues $\phi(r - re) = \phi(r) - \phi(re) = rm - r(em) = 0$.

Supongamos ahora que L es maximal y regular. Por el teorema de la correspondencia, R/L no tiene submódulos propios no nulos. Veamos entonces que $R(R/L) \neq 0$. Si $R(R/L) = 0$ y $r \in R$, entonces, como L es regular, $r - re \in L$ y luego $r \in L$ pues

$$0 = r(e+I) = re + I = r + I,$$

una contradicción a la maximalidad de L.

1.2. Anillos primitivos

Definición 1.2.1. Sea R un anillo y M un R-módulo. Dado un subconjunto $N \subseteq M$ se define el **anulador** de N como conjunto

$$\operatorname{Ann}_R(N) = \{r \in R : rn = 0 \; \forall n \in N\}.$$

Ejemplo 1.2.2. $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n) = n\mathbb{Z}$.

lemma:Ann

Lema 1.2.3. *Sea R un anillo y M un R-módulo. Si $N \subseteq M$ es un subconjunto entonces $\mathrm{Ann}_R(N)$ es un ideal a izquierda de R. Si $N \subseteq M$ es un submódulo, $\mathrm{Ann}_R(N)$ es un ideal de R.*

Demostración. Es fácil ver que $\mathrm{Ann}_R(N)$ es un subgrupo aditivo de R. Luego $\mathrm{Ann}_R(N)$ es un ideal a izquierda pues $R\,\mathrm{Ann}_R(N) \subseteq \mathrm{Ann}_R(N)$: si $r \in R$, $s \in \mathrm{Ann}_R(N)$ y $n \in N$ entonces $(rs)n = r(sn) = r0 = 0$.

Si N es un submódulo, $\mathrm{Ann}_R(N)R \subseteq \mathrm{Ann}_R(N)$ pues si $s \in \mathrm{Ann}_R(N)$, $r \in R$ y $n \in N$, $rn \in \mathrm{Ann}_R(N)$, entonces $(sr)n = s(rn) = 0$.

Definición 1.2.4. Sea R un anillo. Un R-módulo M se dice **fiel** si $\mathrm{Ann}_R(M) = 0$.

Ejemplo 1.2.5. Si K es un cuerpo, entonces K^n es un $M_n(K)$-módulo unitario fiel.

Ejemplo 1.2.6. Si V es un K-espacio vectorial, entonces V es un $\mathrm{End}_K(V)$-módulo unitario fiel.

Definición 1.2.7. Un anillo R se dice **primitivo** si existe un R-módulo simple y fiel.

Nuestra definición de anillo primitivo es, en realidad, la de anillo primitivo a izquierda. Si en lugar de usar módulos a izquierda se usan módulos a derecha, se tiene la noción de anillo primitivo a derecha.

proposition:simple=>prim

Proposición 1.2.8. *Si R es un anillo unitario simple, R es primitivo.*

Demostración. Existe un ideal a izquierda I maximal. Además I es regular pues $1 \in R$. Por la proposición 1.1.20, R/I es un R-módulo simple. Como $\mathrm{Ann}_R(R/I)$ es un ideal de R y R es simple, $\mathrm{Ann}_R(R/I) \in \{0, R\}$. Luego $\mathrm{Ann}_R(R/I) = 0$ pues $1 \notin \mathrm{Ann}(R/I)$.

osition:prim+conm=cuerpo

Proposición 1.2.9. *Si R es un anillo conmutativo, R es primitivo si y sólo si R es un cuerpo.*

Demostración. Si R es un cuerpo, R es primitivo por ser un anillo unitario simple, ver proposición 1.2.8. Si R es un anillo conmutativo primitivo, la proposición 1.1.20 implica la existencia de un ideal I, maximal y regular, tal que el R-módulo R/I es simple y fiel. Como $I \subseteq \mathrm{Ann}_R(R/I) = 0$ y el ideal I es regular, existe $e \in R$ tal que $r = re = er$. Luego R es un anillo conmutativo unitario; es un cuerpo porque $I = 0$ es un ideal maximal.

Ejemplo 1.2.10. $\mathbb{Z}$ no es primitivo pues no es un cuerpo.

Definición 1.2.11. Un ideal P de un anillo R se dice **primitivo** si $P = \mathrm{Ann}_R(M)$ para algún R-módulo M simple.

lemma:primitivo

Lema 1.2.12. *Sea R un anillo y sea P un ideal de R. Entonces P es primitivo si y sólo si R/P es un anillo primitivo.*

Demostración. Supongamos que $P = \mathrm{Ann}_R(M)$ para algún R-módulo M. Entonces M es un R/P-módulo simple con la acción $(r+P)m = rm$, $r \in R$, $m \in M$; la buena definición se obtiene al observar que $P = \mathrm{Ann}_R(M)$ y la simplicidad se obtiene de la simplicidad de M. Además $\mathrm{Ann}_{R/P} M = 0$ pues si $(r+P)M = 0$ entonces $r \in \mathrm{Ann}_R M = P$ y luego $r+P = P$.

Supongamos ahora que R/P es primitivo. Sea M un R/P-módulo fiel y simple. Entonces M es un R-módulo con la acción $rm = (r+P)m$, $r \in R$, $m \in M$. Es trivial verificar que M es simple y que $P = \mathrm{Ann}_R(M)$.

Ejemplo 1.2.13. Sean $R_1, \dots, R_n$ anillos primitivos y sea $R = R_1 \times \cdots \times R_n$. Entonces cada $P_i = R_1 \times \cdots \times R_{i-1} \times 0 \times R_{i+1} \times \cdots \times R_n$ es un ideal primitivo de R pues $R/P_i \simeq R_i$.

lemma:maxprim **Lema 1.2.14.** *Sea R un anillo. Si P es un ideal primitivo, existe un ideal a izquierda L maximal tal que $P = \{x \in R : xR \subseteq L\}$. Recíprocamente, si L es un ideal a izquierda maximal y regular, entonces $\{x \in R : xR \subseteq L\}$ es un ideal primitivo.*

Demostración. Supongamos que $P = \mathrm{Ann}_R(M)$, donde M es R-módulo simple. Por la proposición 1.1.20 sabemos que existe un ideal a izquierda L, maximal y regular, tal que $M \simeq R/L$. Luego $P = \mathrm{Ann}_R(R/L) = \{x \in R : xR \subseteq L\}$.

Recíprocamente, sea L un ideal a izquierda maximal y regular. Por la proposición 1.1.20, R/L es un R-módulo simple. Por definición,

$$\mathrm{Ann}_R(R/L) = \{x \in R : xR \subseteq L\}$$

es un ideal primitivo.

Proposición 1.2.15. *Todo ideal maximal en un anillo unitario es primitivo.*

Demostración. Si R es un anillo unitario y M es un ideal maximal de R, entonces R/M es un anillo unitario simple por la proposición 1.1.20. Luego R/M es primitivo por la proposición 1.2.8 y entonces M es primitivo por el lema 1.2.12.

Ejercicio 1.2.16. Demuestre que en un anillo conmutativo todo ideal primitivo es maximal.

Ejercicio 1.2.17. Demuestre que $M_n(R)$ es primitivo si y sólo si R es primitivo.

1.3. El radical de Jacobson

Definición 1.3.1. Sea R un anillo. El **radical de Jacobson** es el ideal $J(R)$ formado por la intersección de los anuladores de todos los R-módulos simples; si R no posee R-módulos simples, $J(R) = R$.

Observación 1.3.2. De la definición se obtiene que $J(R)$ es un ideal y que

$$J(R) = \bigcap \{P : P \text{ ideal a izquierda primitivo}\}.$$

Si I es un ideal de un anillo R, se define I^n como el subgrupo aditivo generado por el conjunto $\{y_1 \dots y_n : y_j \in I\}$.

Definición 1.3.3. Un ideal I de un anillo R se dice **nilpotente** si $I^n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Análogamente pueden definirse ideales a izquierda (o a derecha) nil.

Definición 1.3.4. Un elemento x de un anillo R se dice **nil** (o nilpotente) si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n = 0$.

Definición 1.3.5. Un ideal I de un anillo R se dice **nil** si todo elemento de I es nil.

Observemos que un ideal I es nilpotente si y sólo si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_1 x_2 \cdots x_n = 0$ para todo $x_1, \dots, x_n \in I$. Obviamente, todo ideal nilpotente es nil pues si $I^n = 0$ entonces, en particular, $x^n = 0$ para todo $x \in I$.

Ejemplo 1.3.6. Sea $R = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]/(x_1, x_2^2, x_3^3, \dots)$. El ideal $I = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ es nil en R pues está generado por elementos nilpotentes pero no es nilpotente. Si lo fuera, existiría $k \in \mathbb{N}$ tal que $I^k = 0$, y luego $x_i^k = 0$ para todo i, una contradicción pues $x_{k+1}^k \neq 0$.

pro:nilJ **Proposición 1.3.7.** *Sea R un anillo. Entonces $J(R)$ contiene a todo ideal a izquierda (resp. a derecha) nil.*

Demostración. Supongamos que existe un ideal a izquierda (resp. a derecha) nil I tal que $I \not\subseteq J(R)$. Entonces existe un R-módulo simple M tal que $n = xm \neq 0$ para algún $x \in I$ y algún $m \in M$. Como M es simple, $Rn = M$ y luego existe $r \in R$ tal que $(rx)m = r(xm) = rn = m$ (resp. $(xr)n = x(rn) = xm = n$). Esto implica que $(rx)^k m = m$ (resp. $(xr)^k n = n$) para todo $k \geq 1$, una contradicción pues $rx \in I$ (resp. $xr \in I$) es un elemento nilpotente.

Definición 1.3.8. Sea R un anillo y sea $a \in R$. El elemento $a \in R$ se dice **casi-regular a izquierda** si existe $r \in R$ tal que $r + a + ra = 0$; y se dice **casi-regular a derecha** si existe $r \in R$ tal que $a + r + ar = 0$.

exercise:circ **Ejercicio 1.3.9.** Sea R un anillo. Demuestre que $R \times R \to R$, $(r,s) \mapsto r \circ s = r + s + rs$, es una operación asociativa con neutro 0.

Ejemplo 1.3.10. Sea $R = \mathbb{Z}/3 = \{0, 1, 2\}$. Entonces

$$\begin{array}{c|ccc} \circ & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}$$

remark:eq1inR

Observación 1.3.11. Si R es unitario y $x \in R$ es casi-regular a izquierda (resp. a derecha) si y sólo si $1+x$ es inversible a izquierda (resp. a derecha). En efecto, si existe $r \in R$ tal que $r+x+rx=0$ entonces $(1+r)(1+x)=1+r+x+rx=1$. Recíprocamente, si existe $y \in R$ tal que $y(1+x)=1$ entonces

$$(y-1)\circ x = y-1+x+(y-1)x = 0.$$

Ejemplo 1.3.12. Si $x \in R$ es un elemento nilpotente, entonces $y=\sum_{n\geq 1} x^n \in R$ es casi-regular. En efecto, si existe N tal que $x^N=0$, la suma que define al elemento y es finita y cumple que $y+(-x)+y(-x)=0$.

Un ideal (a izquierda, a derecha o bilátero) I de un anillo R se dice **casi-regular a izquierda** (resp. a derecha) si todo elemento de I es casi-regular a izquierda (resp. a derecha). Un ideal (a izquierda, a derecha o bilátero) se dice **casi-regular** si es casi-regular a izquierda y a derecha.

lemma:casiregular

Lema 1.3.13. *Sea I un ideal a izquierda de un anillo R. Si I es casi-regular a izquierda, I es casi-regular.*

Demostración. Sea $x \in I$. Veamos que x es casi-regular a derecha. Como I es casi-regular a izquierda, existe $r \in R$ tal que $r\circ x = r+x+rx=0$. Como $r=-x-rx \in I$, existe $s \in R$ tal que $s\circ r = s+r+sr=0$. Luego s es casi-regular a derecha y

$$x = 0\circ x = (s\circ r)\circ x = s\circ(r\circ x) = s\circ 0 = s.$$

Sea $(A,\leq)$ un conjunto parcialmente ordenado, es decir A es un conjunto con una relación R en $A\times A$ reflexiva, transitiva y antisimétrica. (Reflexiva: $a\leq a$ para todo $a\in A$; transitiva: si $a\leq b$ y $b\leq c$ entonces $a\leq c$; y antisimétrica: si $a\leq b$ y $b\leq a$ entonces $a=b$.) Dos elementos $a,b\in A$ se dicen **comparables** si $a\leq b$ o $b\leq a$. Un elemento $a\in A$ se dice **maximal** si para todo $c\in A$ comparable con a, se tiene $c\leq a$. Una **cota superior** para un $B\subseteq A$ no vacío es un elemento $d\in A$ tal que $b\leq d$ para todo $b\in B$. Una **cadena** en A es un subconjunto B tal que todo par de elementos de B es comparable. El **lema de Zorn** afirma lo siguiente:

> Si A es un conjunto no vacío parcialmente ordenado tal que toda cadena de A posee una cota superior en A, entonces A posee elemento maximal.

Usaremos el lema de Zorn para demostrar el siguiente lema:

lemma:maxreg

Lema 1.3.14. *Sea R un anillo y sea $x\in R$ un elemento que no es casi-regular a izquierda. Entonces existe un ideal a izquierda M maximal tal que $x\notin M$. Más aún, R/M es un R-módulo simple y $x\notin \operatorname{Ann}_R(R/M)$.*

Demostración. Sea $T=\{r+rx : r\in R\}$. Es fácil verificar que T es un ideal a izquierda de R tal que $x\notin T$ (pues si $x\in T$ entonces $r+rx=-x$ para algún $r\in R$, una contradicción pues x no es casi-regular a izquierda).

El único ideal a izquierda de R que contiene a $T\cup\{x\}$ es R: si existe un ideal a izquierda U que contiene a T entonces $x\notin U$ pues, de lo contrario, todo $r\in R$ podría escribirse como $r=(r+rx)+r(-x)\in U$.

Sea $\mathscr{S}$ el conjunto de ideales propios de R que contienen a T, parcialmente ordenado por la inclusión. Si $\{K_i : i \in I\}$ es una cadena en $\mathscr{S}$, entonces $K = \cup_{i\in I} K_i$ es una cota superior para la cadena (K es un ideal propio pues $x \notin K$). Por el lema de Zorn, $\mathscr{S}$ admite un elemento maximal, digamos M. Entonces M es un ideal a izquierda maximal tal que $x \notin M$. Además M es regular pues $r + r(-x) \in T \subseteq M$ para todo $r \in R$. Luego R/M es un R-módulo simple por la proposición 1.1.20. Como $x(x+M) \neq 0$ (pues si $x^2 \in M$ entonces $x \in M$ al observar que $x + x^2 \in T \subseteq M$), que $x \notin \mathrm{Ann}_R(R/M)$.

remark:xJ(R)

Observación 1.3.15. Si $x \in R$ no es casi-regular a izquierda, por el lema 1.3.14 existe un R-módulo simple M tal que $x \notin \mathrm{Ann}_R(M)$. Luego $x \notin J(R)$.

thm:casireg_eq

Teorema 1.3.16. *Sean R un anillo y $x \in R$. Son equivalentes:*

1. *El ideal a izquierda generado por x es casi-regular.*
2. *Rx es casi-regular.*
3. *$x \in J(R)$.*

Demostración. La implicación $(1) \implies (2)$ es trivial pues Rx está contenido en el ideal a izquierda generado por x. Demostremos que $(2) \implies (3)$. Si $x \notin J(R)$ entonces por el lema 1.3.14 existe un R-módulo simple M tal que $xm \neq 0$ para algún $m \in M$. Por la simplicidad, $R(xm) = M$ y luego existe $r \in R$ tal que $rxm = -m$. Existe $s \in R$ tal que $s + rx + s(rx) = 0$ y entonces

$$-m = rxm = (-s - srx)m = -sm + sm = 0,$$

una contradicción. Por último, para demostrar que $(3) \implies (1)$ basta observar que x es casi-regular a izquierda por la observación 1.3.15 y luego el ideal a izquierda generaod por x es casi-regular por el lema 1.3.13.

Corolario 1.3.17. *Si R es un anillo, $J(R)$ es un ideal casi-regular que contiene a todo ideal casi-regular a izquierda.*

Demostración. Es consecuencia inmediata del teorema 1.3.16.

thm:J(R)

Teorema 1.3.18. *Sea R un anillo tal que $J(R) \neq R$. Entonces*

$$J(R) = \bigcap \{I : I \text{ ideal a izquierda maximal y regular}\}.$$

Demostración. Sea $K = \bigcap\{I : I \text{ ideal a izquierda maximal y regular}\}$. Por la proposición 1.1.20 podemos escribir

$$J(R) = \bigcap \{\mathrm{Ann}_R(R/I) : I \text{ ideal a izquierda maximal y regular}\}.$$

Sea I un ideal a izquierda maximal y regular. Si $r \in J(R) \subseteq \mathrm{Ann}_R(R/I)$ entonces, como I es regular, existe $e \in R$ tal que $r - re \in I$. Como

$$re + I = r(e + I) = 0,$$

$re \in I$ y por lo tanto $r \in I$. Luego $J(R) \subseteq K$. La otra implicación es trivial.

Ejemplo 1.3.19. Todo ideal maximal de $\mathbb{Z}$ es de la forma $p\mathbb{Z} = \{pm : m \in \mathbb{Z}\}$, donde p es algún número primo. Entonces $J(\mathbb{Z}) = \cap_p p\mathbb{Z} = \{0\}$.

Veamos algunos resultados que nos permitirán calcular radicales.

Proposición 1.3.20. *Sea $\{R_i : i \in I\}$ una familia de anillos. Entonces*

$$J\left(\prod_{i\in I} R_i\right) = \prod_{i\in I} J(R_i).$$

Demostración. Sea $R = \prod_{i\in I} R_i$ y sea $x = (x_i)_{i\in I} \in R$. El ideal a izquierda Rx es casi-regular si y sólo si cada ideal a izquierda $R_i x_i$ es casi-regular en R_i (pues x casi-regular en R si y sólo si cada x_i es casi-regular en R_i. Luego $x \in J(R)$ si y sólo si $x_i \in J(R_i)$ para todo $i \in I$.

lemma:trickJ1 **Lema 1.3.21.** *Sea R un anillo y sea $x \in R$. Si $-x^2$ es un elemento casi-regular a izquierda, x también.*

Demostración. Sea $r \in R$ tal que $r + (-x^2) + r(-x^2) = 0$ y sea $s = r - x - rx$. Entonces x es casi-regular a izquierda pues

$$\begin{aligned} s + x + sx &= (r - x - rx) + x + (r - x - rx)x \\ &= r - x - rx + x + rx - x^2 - rx^2 = r - x^2 - rx^2 = 0. \end{aligned}$$

proposition:J(I) **Proposición 1.3.22.** *Si I es un ideal de un anillo R, entonces $J(I) = I \cap J(R)$.*

Demostración. Como $I \cap J(R)$ es un ideal de I, si $x \in I \cap J(R)$ entonces x es casi-regular a izquierda en R. Sea $r \in R$ tal que $r + x + rx = 0$. Como $r = -x - rx \in I$, el elemento x es casi-regular a izquierda en I. Luego $I \cap J(R) \subseteq J(I)$.

Sea ahora $x \in J(I)$ y sea $r \in R$. Como $-(rx)^2 = (-rxr)x \in I(J(I)) \subseteq J(I)$, el elemento $-(rx)^2$ es casi regular a izquierda en I. Luego rx es casi regular a izquierda gracias al lema 1.3.21.

Definición 1.3.23. Un anillo R se dice **radical** si $J(R) = R$.

Ejemplo 1.3.24. Si R es un anillo, la proposición 1.3.22 implica que $J(R)$ es un anillo radical.

theorem:anillo_radical **Teorema 1.3.25.** *Sea R un anillo. Son equivalentes:*

1. *R es radical.*
2. *R no admite R-módulos simples.*
3. *R no tiene ideales a izquierda maximales y regulares.*
4. *R no tiene ideales a izquierda primitivos.*
5. *Todo elemento de R es casi-regular.*
6. *$(R, \circ)$ es un grupo.*

Demostración. La equivalencia $(1) \iff (5)$ es consecuencia del teorema 1.3.16. La equivalencia $(5) \iff (6)$ es trivial por el ejercicio 1.3.9.

Probemos que $(1) \implies (2)$. Supongamos que existe un R-módulo simple N. Como $R = J(R) \subseteq \mathrm{Ann}_R(N)$, $R = \mathrm{Ann}_S(N)$ y luego $RN = 0$, una contradicción pues N es simple.

Para demostrar que $(2) \implies (3)$ basta observar que para todo ideal a izquierda I maximal y regular, R/I es un R-módulo simple por la proposición 1.1.20.

Para ver que $(3) \implies (4)$ supongamos que existe un ideal a izquierda primitivo, digamos $I = \mathrm{Ann}_R(M)$, donde M es algún R-módulo simple. Entonces $I = R$ pues $R = J(R) \subseteq I$, una contradicción a la simplicidad de M pues entonces $RM = 0$.

La implicación $(4) \implies (2)$ es fácil: si M es un R-módulo simple, entonces $\mathrm{Ann}_R(M)$ es un ideal a izquierda primitivo.

Ejemplo 1.3.26. Sea $A = \left\{ \frac{2x}{2y+1} : x, y \in \mathbb{Z} \right\}$. Entonces A es un anillo radical pues pues el inverso de un elemento $\frac{2x}{2y+1}$ con respecto a la operación $\circ$ es

$$\left(\frac{2x}{2y+1} \right)' = \frac{-2x}{2(x+y)+1}.$$

Ejemplo 1.3.27. El radical de $\mathbb{Z}/8$ es $\{0, 2, 4, 6\}$.

Veamos una aplicación de los anillos radicales. Diremos que un par (X, r) es una **solución combinatoria** de la ecuación de Yang–Baxter si X es un conjunto y $r \colon X \times X \to X \times X$ es una función biyectiva tal que

$$(r \times \mathrm{id})(\mathrm{id} \times r)(r \times \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \times r)(r \times \mathrm{id})(\mathrm{id} \times r)$$

Diremos que una solución (X, r) es involutiva si $r^2 = \mathrm{id}$. Siempre podemos escribir

$$r(x, y) = (\sigma_x(y), \tau_y(x)).$$

Diremos que la solución (X, r) es **no degenerada** si las $\sigma_x \colon X \to X$ y las $\tau_x \colon X \to X$ son funciones biyectivas.

Ejemplo 1.3.28. Sea X un conjunto y sean $\sigma, \tau \colon X \to X$ funciones biyectivas tales que $\sigma\tau = \tau\sigma$. Entonces $r(x, y) = (\sigma(y), \tau(x))$ es una solución combinatoria de la ecuación de Yang–Baxter. La solución (X, r) es involutiva si y sólo si $\sigma\tau = \mathrm{id}$.

Ejercicio 1.3.29. Sea A un anillo radical. Para $a, b \in A$ se define

$$\begin{aligned} \lambda_a(b) &= -a + a \circ b = ab + b, \\ \mu_b(a) &= \lambda_a(b)' \circ a \circ b = (ab+b)'a + a. \end{aligned}$$

Demuestre las siguientes afirmaciones:

1. La función $\lambda \colon (A, \circ) \to \mathrm{Aut}(A, +)$, $a \mapsto \lambda_a$, está bien definida y es un morfismo de grupos.

2. La función $\mu\colon (A,\circ)\to \operatorname{Aut}(A,+)$, $b\mapsto \mu_b$, está bien definida y es un antimorfismo de grupos.

Ejercicio 1.3.30 (Rump). Sea A un anillo radical. Demuestre que la función

$$r_A\colon A\times A\to A\times A,\quad r_A(a,b)=(\lambda_a(b),\mu_b(a)),$$

es una solución involutiva no degenerada de la ecuación de Yang–Baxter.

thm:Jnilpotente

Teorema 1.3.31. *Si R es un anillo artiniano a izquierda, $J(R)$ es nilpotente.*

Demostración. Sea $J=J(R)$. Como R es artiniano a izquierda, la sucesión $(J^m)_{m\in\mathbb{N}}$ de ideales a izquierda se estabiliza. Existe entonces $k\in\mathbb{N}$ tal que $J^k=J^l$ para todo $l\geq k$. Veamos que $J^k=0$. Si $J^k\neq 0$ sea $\mathscr{S}$ el conjunto de todos los ideales a izquierda I tales que $J^kI\neq 0$. Como $J^kJ^k=J^{2k}=J^k\neq 0$, $\mathscr{S}$ es no vacío. Como R es artiniano a izquierda, $\mathscr{S}$ posee un elemento minimal, digamos I_0. Como $J^kI_0\neq 0$, sea $x\in I_0\setminus\{0\}$ tal que $J^kx\neq 0$. Además J^kx es un ideal a izquierda de R contenido en I_0 tal que $J^kx\in\mathscr{S}$ (pues $J^k(J^kx)=J^{2k}x=J^kx\neq 0$). Por la minimalidad de I_0, $J^kx=I_0$. En particular, existe $r\in J^k\subseteq J(R)$ tal que $rx=x$. Como $-r\in J(R)$ es casi-regular a izquierda, existe $s\in R$ tal que $s-r-sr=0$. Luego

$$x=rx=(s-sr)x=sx-s(rx)=sx-sx=0,$$

una contradicción.

Corolario 1.3.32. *Sea R un anillo artiniano a izquierda. Todo ideal a izquierda (resp. derecha) nil es nilpotente y $J(R)$ es el único ideal maximal nilpotente de R.*

Demostración. Sea L un ideal a izquierda nil. Por la proposición 1.3.7, L está contenido en $J(R)$. Luego L es nilpotente pues $J(R)$ es nilpotente por el teorema 1.3.31.

Teorema 1.3.33. *Sea R un anillo y sea $n\in\mathbb{N}$. Entonces $J(M_n(R))=M_n(J(R))$.*

Demostración. Demostremos primero que $J(M_n(R))\subseteq M_n(J(R))$. Si $J(R)=R$, no hay nada para demostrar. Supongamos entonces que $J(R)\neq R$ y sea $J=J(R)$. Si M es un R-módulo simple, M^n es un $M_n(R)$-módulo simple con la multiplicación usual. Sean $x=(x_{ij})\in J(M_n(R))$ y $m_1,\dots,m_n\in M$. Entonces

$$x\begin{pmatrix} m_1\\ \vdots\\ m_n\end{pmatrix}=0.$$

En particular, $x_{ij}\in\operatorname{Ann}_R(M)$ para todo $i,j\in\{1,\dots,n\}$ y luego $x\in M_n(J)$.

Veamos ahora que $M_n(J)\subseteq J(M_n(R))$. Sean

$$J_1=\begin{pmatrix} J & 0 & \cdots & 0\\ J & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ J & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\quad\text{y}\quad x=\begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0\\ x_2 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_n & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\in J_1.$$

Como x_1 es casi-regular, existe $y_1 \in R$ tal que $x_1 + y_1 + x_1 y_1 = 0$. Si

$$y = \begin{pmatrix} y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

entonces $u = x + y + xy$ es triangular inferior pues

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_3 y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n y_1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $u^n = 0$, el elemento

$$v = -u + u^2 - u^3 + \cdots + (-1)^{n-1} u^{n-1}$$

cumple que $u + v + uv = 0$. Luego x es casi-regular a derecha pues

$$x + (y + v + yv) + x(y + v + yv) = 0,$$

y entonces J_1 es casi-regular a derecha. Similarmente se demuestra que todo J_i es casi-regular a derecha y luego $J_i \subseteq J(M_n(R))$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Se concluye entonces que $J_1 + \cdots + J_n \subseteq J(M_n(R))$ y luego $M_n(J) \subseteq J(M_n(R))$

1.4. El radical en anillos unitarios

Si el anillo es unitario, se tiene además el siguiente resultado:

thm:J(R)=capM **Teorema 1.4.1.** *Sea R un anillo unitario. Entonces*

$$J(R) = \bigcap \{M : M \textit{ ideal a izquierda maximal}\}.$$

Demostración. Sea $T = \bigcap \{M : M$ ideal a izquierda maximal$\}$. Como R es unitario, todo ideal a izquierda es regular. Luego $T \subseteq J(R)$. La otra inclusión es trivial, ver teorema 1.3.18.

cor:Jcon1 **Corolario 1.4.2.** *Sea R un anillo unitario no nulo. Son equivalentes:*

1. *$x \in J(R)$.*
2. *$xM = 0$ para todo R-módulo simple M.*
3. *$x \in P$ para todo ideal a izquierda primitivo P.*
4. *$1 + rx$ es inversible para todo $r \in R$.*

5. $1+\sum_{i=1}^{n} r_i x s_i$ *es inversible para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y todo* $r_i, s_i \in R$.
6. *x pertenece a todo ideal a izquierda maximal.*

Demostración. Las equivalencias entre (1), (2) y (3) son triviales. Las equivalencias (1) $\iff$ (4) $\iff$ (5) se obtienen del teorema 1.3.16 al usar la observación 1.3.11. La equivalencia (1) $\iff$ (6) se obtiene del teorema 1.4.1

Recordemos que un anillo conmutativo y unitario R se dice **local** si admite un único ideal maximal.

Ejemplo 1.4.3. Sea D un anillo de división y sea $R = D[X_1, \dots, X_n]$. Veamos que $J(R) = 0$. Como las unidades de R son los elementos no nulos de D, $J(R)$ es un ideal de D. Como D es simple, $J(R) \in \{0, D\}$. Si $J(R) = D$, entonces existe $f \in R$ tal que $-1 + f + (-1)f = 0$ y luego $-1 = 0$, una contradicción. Luego $J(R) = 0$.

Ejemplo 1.4.4. Si R es un anillo local y M es su ideal maximal entonces $J(R) = M$. Veamos algunos casos particulares:

1. Sea K un cuerpo y $R = K[[X]]$. Entonces $J(R) = (X)$.
2. Sea p un primo y $R = \mathbb{Z}/p^n$. Entonces $J(R) = (p)$.

1.5. El radical en álgebras

\'Algebra:\'Algebra

Definición 1.5.1. Un espacio vectorial A sobre un cuerpo K es un **algebra** sobre K (o una K-álgebra) si posee una multiplicación asociativa $A \times A \to A$, $(a,b) \mapsto ab$, tal que $(\lambda a + \mu b)c = \lambda(ac) + \mu(bc)$ y $(\lambda a + \mu b)c = \lambda(ac) + \mu(bc)$ para todo $a, b, c \in A$ y $\lambda, \mu \in K$. El álgebra A se dice **unitaria** si existe un elemento $1_A \in A$ tal que $1_A a = a 1_A = a$ para todo $a \in A$.

Ejemplo 1.5.2. Todo cuerpo K es una K-álgebra unitaria.

Ejemplo 1.5.3. Si K es un cuerpo, $K[X]$ es una K-álgebra unitaria.

Ejemplo 1.5.4. Si A es un álgebra, entonces $M_n(A)$ es un álgebra.

La **dimensión** de un álgebra A es la dimensión de A como K-espacio vectorial.

Definición 1.5.5. Un **ideal** de un álgebra es un ideal del anillo que además es un subespacio.

En general los ideales de un álgebra no conciden con los ideales del anillo subyacente:

Ejemplo 1.5.6. Sea $A = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{Q}\}$ un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial de dimensión uno. Con el producto $ab = 0$ para todo $a, b \in A$, el grupo abeliano A se transforma en un álgebra. El subgrupo aditivo $\{mx : m \in \mathbb{Z}\}$ de A es un ideal del anillo pero no un ideal del álgebra.

Análogamente se definen ideales a izquierda y a derecha de un álgebra.

remark:Aunitaria

Observación 1.5.7. Si A es un álgebra unitaria, entonces todo ideal a izquierda del anillo A es un ideal a izquierda del álgebra A. Si L es un ideal de A y $\lambda \in K$ y $x \in L$, entonces

$$\lambda x = \lambda(1_A x) = (\lambda 1_A)x$$

y luego, como $\lambda 1_A \in A$, se concluye que $\lambda L = (\lambda 1_A)L \subseteq L$. Análogamente se demuestra que todo ideal a derecha del anillo unitario A es también un ideal de A como álgebra.

Ejercicio 1.5.8. Demuestre que si A es un álgebra unitaria, entonces todo ideal a derecha del anillo A es un ideal a derecha del álgebra A.

La observación 1.5.7 implica que el radical de Jacobson de un álgebra unitaria coincide con el radical de Jacobson del anillo subyacente. Este resultado también vale en el caso de álgebras no unitarias.

exa:Zorn:regular

Ejercicio 1.5.9. Sea R un anillo y sea I un ideal a izquierda regular. Utilice el lema de Zorn y demuestre que I está contenido en un ideal maximal y regular.

Teorema 1.5.10. *Sea A una K-álgebra y sea I un subconjunto de A. Entonces I es ideal a izquierda maximal y regular del álgebra A si y sólo si I es ideal a izquierda maximal y regular del anillo A.*

Demostración. Sea I un ideal a izquierda maximal y regular del anillo A. Queremos demostrar que $\lambda I \subseteq I$ para todo $\lambda \in K$. Si suponemos que $\lambda I \not\subseteq I$ para algún λ, entonces $I + \lambda I$ es un ideal a izquierda del anillo A que contiene a I pues

$$a(I + \lambda I) = aI + a(\lambda I) \subseteq I + \lambda(aI) \subseteq I + \lambda I.$$

Como I es maximal, $I + \lambda I = A$. Por la regularidad de I, existe $e \in R$ tal que $a - ae \in I$ para todo $a \in A$. Si escribimos $e = x + \lambda y$ para $x, y \in I$, entonces

$$e^2 = e(x + \lambda y) = ex + e(\lambda y) = ex + (\lambda e)y \in I.$$

Como $e^2 - e \in I$ y $e^2 \in I$, se concluye que $e \in I$. Luego $A = I$ pues $a - ae \in I$ para todo $a \in A$, una contradicción.

Recíprocamente, si I es un ideal a izquierda maximal y regular del álgebra A, entonces I es ideal a izquierda regular del anillo A. Falta ver entonces que I es maximal. Por el ejercicio 1.5.9 sabemos que existe un ideal a izquierda maximal L del anillo A que contiene a I. Como L es regular, la implicación demostrada nos dice que L es un ideal a izquierda maximal y regular del anillo A. Luego $L = I$ por la maximalidad de I.

Corolario 1.5.11. *Sea A un álgebra. El radical de Jacobson del anillo A coincide con el radical de Jacobson del álgebra A.*

Demostración. Es consecuencia del teorema anterior y de que el radical de Jacobson es la intersección de los ideales a izquierda maximales y regulares.

Definición 1.5.12. Sea A un álgebra unitaria. Un elemento $a \in A$ se dice **algebraico** sobre A si existe un polinomio no nulo $f \in K[X]$ tal que $f(a) = 0$. Si todo elemento de A es algebraico, A se dice **algebraica**

lem:algebraica **Lema 1.5.13.** *Toda álgebra unitaria de dimensión finita es algebraica.*

Demostración. Supongamos que $\dim A = n$ y sea $a \in A$. Como $\{1, a, a^2, \dots, a^n\}$ es linealmente dependendiente, existe un polinomio no nulo $f \in k[X]$ tal que $f(a) = 0$.

lemma:algebraico=nil **Lema 1.5.14.** *Sea A un álgebra unitaria y sea $x \in J(A)$. Entonces x es algebraico si y sólo si x es nil.*

Demostración. Demostremos la implicación no trivial. Como x es algebraico, existen $a_0, \dots, a_n \in K$ no todos cero tales que

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0.$$

Sea r el menor entero tal que $a_r \neq 0$. Podemos escribir entonces

$$x^r (1 + b_1 x + \cdots + b_m x^m) = 0,$$

donde $b_1, \dots, b_m \in K$. Como $1 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$ es una unidad por el corolario 1.4.2, entonces $x^r = 0$.

Como aplicación tenemos el siguiente resultado:

thm:algebraica=>Jnil **Teorema 1.5.15.** *Si A es un álgebra algebraica, $J(A)$ es el mayor ideal nil de A.*

Demostración. Por el lema 1.5.14, $J(A)$ es un ideal nil. Por la propoisición 1.3.7, $J(A)$ es el mayor ideal nil de A.

thm:Amitsur **Teorema 1.5.16 (Amitsur).** *Si A es una K-álgebra unitaria tal que* $\dim_K A < |K|$ *(como cardinales), entonces $J(A)$ es el mayor ideal nil de A.*

Demostración. Si K es un cuerpo finito, entonces A es un álgebra de dimensión finita. Como entonces A es algebraica, $J(A)$ es un ideal nil por el teorema 1.5.15.

Supongamos entonces que K es infinito. Sea $a \in J(A)$. El corolario 1.4.2 implica que todo elemento de la forma $1 - \lambda^{-1} a$, $\lambda \in K \setminus \{0\}$, es inversible. Entonces

$$a - \lambda = -\lambda(1 - \lambda^{-1} a)$$

es inversible para todo $\lambda \in K \setminus \{0\}$. Sea $S = \{(a-\lambda)^{-1} : \lambda \in K \setminus \{0\}\}$. Como

$$(a-\lambda)^{-1} = (a-\mu)^{-1} \iff \lambda = \mu,$$

entonces $|S| = |K \setminus \{0\}| = |K| > \dim_K A$. Como entonces S es linealmente dependiente, existen escalares no nulos $\beta_1, \dots, \beta_n \in K$ y elementos distintos $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tales que

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i (a - \lambda_i)^{-1} = 0. \tag{1.2}$$ eq:Amitsur

Si multiplicamos (1.2) por $\prod_{i=1}^{n}(a-\lambda_i)$, obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_i\prod_{j\neq i}(a-\lambda_j)=0.$$

Afirmamos que a es algebraico sobre K. En efecto,

$$f=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\prod_{j\neq i}(X-\lambda_j)$$

es no nulo pues $f(\lambda_1)=\beta_1(\lambda_1-\lambda_2)\cdots(\lambda_1-\lambda_n)\neq 0$ y cumple que $f(a)=0$. Como $a\in J(A)$ es algebraico, a es nil por el lema 1.5.14.

Corolario 1.5.17. *Sea K un cuerpo no numerable y A una K-álgebra con base numerable. Entonces $J(A)$ es el mayor ideal nil de A.*

Demostración. Es consecuencia del teorema de Amitsur pues $\dim_K A<|K|$.