Clase práctica 12 04/10 Proba (C)

Ejercicio 1. Dado un conjunto de datos $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ con $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ se define la distribución empírica de los datos por

$$\hat{F}(x, y) = \frac{|\{i \in \{1, \dots, n\} \mid x_i \leq x, y_i \leq y\}|}{n}$$

Sea (X, Y) un v.a. con distribución $\hat{F}$. Consideremos los siguientes 8 datos:

$(-1.70, -1.21), (3.27, 0.61), (-0.89, 0.09), (1.65, 1.34),$

$(0.46, -0.79), (-2.78, -1.01), (0.24, 0.47), (-2.33, 1.36)$

b) Calcular F_X y F_Y .

d) Calcular $\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y), \mathbb{V}(X), \mathbb{V}(Y), \text{Cov}(X, Y), \rho(X, Y)$.

c) Decidir si X e Y son independientes.

Ejercicio 2. Sean (X_1, X_2) con $X_1 \simeq Be(0.7)$, y $P(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) = 0.9$, $P(X_2 = 0 \mid X_1 = 0) = 0.7$, por ejemplo X_t puede decir si el valor de una acción sube o si la economía crece en $t = 1, 2$.

a) Hallar la distribución condicional de $X_2 \mid X_1 = i$ para $i = 0, 1$. Hallar la distribución de X_2 . Son independientes?

b) Calcular $\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y), \mathbb{V}(X), \mathbb{V}(Y), \text{Cov}(X, Y), \rho(X, Y)$.

Ejercicio 3. (El algoritmo Quicksort) Se define el siguiente algoritmo de ordenamiento, si se le dan n distintos valores (reales, enteros, etc) desordenados y queremos ordenarlos de menor a mayor, el algoritmo es el siguiente:

1. Si $n = 2$ entonces se comparan ambos valores y se los ordena.

2. Si $n > 2$ entonces se elige un valor al azar y se lo compara contra todos los otros, se pone a los menores en un conjunto y a los mayores en otro conjunto.

3. Se itera el algoritmo en cada conjunto más pequeño (Divide and Conquer).

Se define la variable aleatoria

$$X = \text{'número de comparaciones que necesita Quicksort para ordenar } n \text{ valores'}$$

Cuál es la esperanza de X ?

Ejercicio 4. (La aguja de Buffon) Dada una aguja de longitud l , se la arroja al azar en el plano, donde hay dibujadas rectas paralelas a distancia d una de otra, con $l < d$. Cuál es la probabilidad de que la aguja interseque a una recta?