Ejercicio 1. Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Se toma una muestra de tamaño $n = 10$ y se observa una media muestral de 3.2 y un desvio muestral de 1.15.

a) Hallar un IC de nivel exacto 0.95 para μ si $\sigma = 1$ es conocido.

b) Hallar un IC de nivel exacto 0.95 para μ si σ es desconocido.

Solución:

a) Como σ es conocido consideramos el pivote $T = \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma_0} \sim N(0,1)$. Es un pivote pues su distribución no depende de μ y es conocida, y es funcion de la muestra y de μ ya que σ es conocido (e igual a 1), i.e. $T = T(\underline{X}, \mu)$. Se sigue entonces que

$$1 - \alpha = P(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma_0} \leqslant z_{\frac{\alpha}{2}})$$

Como $\alpha = 0.05$, $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96$, podemos reemplazarlo y tambien a $\sigma_0 = 1$. Luego

$$0.95 = P(-1.96 \leqslant \sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu) \leqslant 1.96) = P(\overline{X}_n - \frac{1.96}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \overline{X}_n + \frac{1.96}{\sqrt{n}})$$

Podemos reemplazar también que $n = 10$. Luego el intervalo de confianza es $IC = [\overline{X}_{10} - \frac{1.96}{\sqrt{10}}, \overline{X}_{10} + \frac{1.96}{\sqrt{10}}]$. También se suele escribir en un abuso de notación $IC = \overline{X}_{10} \pm \frac{1.96}{\sqrt{10}}$. En general, para $\sigma = \sigma_0$, α y n cualquiera el intervalo de confianza en este caso es $IC = [\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}]$.
Notar que el IC siempre es un intervalo aleatorio. El intervalo de confianza es un estimador de 'tipo' intervalo, y al igual que los estimadores puntuales es aleatorio. Reemplazar el IC por su valor observado es un error conceptual, tanto como decir que el estimador puntual del la media es 3.2, en lugar de $\overline{X}$. Estaríamos confundiendo el estimador con la estimación. Un **error muy común** es que a la hora de encontrar el intervalo es que en el despeje de μ reemplazaron $\overline{X}$ por la media muestral, esto es un error conceptual pues decian que

$$0.95 = P(3.2 - \frac{1.96}{\sqrt{10}} \leqslant \mu \leqslant 3.2 + \frac{1.96}{\sqrt{10}}) = P(2.58 \leqslant \mu \leqslant 3.82)$$

Esto no tiene ningún sentido (al menos para un frecuentista), μ **es un parámetro desconocido pero fijo**, por lo tanto pertenece o no a ese intervalo, osea la probabilidad es 0 o 1, no es 0.95. No se pueden reemplazar las variables aleatorias involucradas en el IC por los valores observados.
Por último, para calcular el intervalo que se reporta, el observado o de la muestra, ahí si se reemplazan los valores observados, esto es $IC_{obs} = [\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}] = [2.58, 3.82]$.
Qué nos dice el IC? La construcción del IC nos dice exactamente que:

$$0.95 = P(\overline{X}_{10} - \frac{1.96}{\sqrt{10}} \leqslant \mu \leqslant \overline{X}_{10} + \frac{1.96}{\sqrt{10}})$$

Esto nos dice que si uno toma un gran número de muestras de tamaño $n = 10$, y para cada una de ellas calcula el IC muestral (u observado), entonces aproximadamente un 95% de estos intervalos contiene a μ. (Ver simulación más abajo).
No es correcto decir que 'la probabilidad de que μ pertenece al intervalo de confianza es 0.95' ya que μ no es aleatorio, el intervalo lo es, es correcto 'la probabilidad de que el intervalo de confianza contenga a μ es 0.95', esto claro, hablando del intervalo $IC = [\overline{X}_{10} - \frac{1.96}{\sqrt{10}}, \overline{X}_{10} + \frac{1.96}{\sqrt{10}}]$, no del intervalo observado en la muestra.
Una vez construido el intervalo muestral, no podemos hablar de probabilidad y por lo tanto decimos que tenemos **confianza** 0.95 de que μ pertenece al intervalo de la muestra.

b) Como σ es desconocido, consideramos el pivote $T = \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mu}{S} \sim t_{n-1}$, que tiene distribución T-student con $n - 1$ grados de libertad. Se tiene entonces que

$$1 - \alpha = P(-t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \leqslant \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mu}{S} \leqslant t_{n-1,\frac{\alpha}{2}})$$

Como $\alpha = 0.05$, $t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} = t_{9,0.025} = 2.26$, podemos reemplazarlo, luego

$$0.95 = P(-2.26 \leqslant \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mu}{S} \leqslant 2.26) = P(\overline{X} - 2.26\frac{S}{\sqrt{10}} \leqslant \mu \leqslant \overline{X} + 2.26\frac{S}{\sqrt{10}})$$

Por lo tanto el IC es $IC = [\overline{X} - 2.26\frac{S}{\sqrt{10}}, \overline{X} + 2.26\frac{S}{\sqrt{10}}]$. En general para α y n cualquiera es

$$IC = [\overline{X} - t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}]$$

El intervalo observado en nuestra muestra es $IC_{obs} = [3.2 - 2.26\frac{1.15}{\sqrt{10}}, 3.2 + 2.26\frac{1.15}{\sqrt{10}}] = [2.37, 4.02]$.

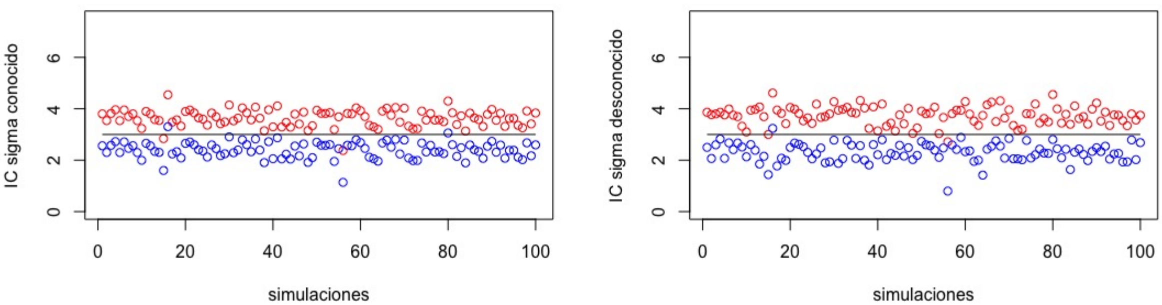

Figure 1: Cien simulaciones del IC con $\mu = 3$, $\sigma = 1$ (conocido o desconocido).

Se observa que los intervalos de confianza para μ con σ conocido son de menor longitud a los de σ desconocido. Esto se debe a que la T-student tiene colas más pesadas que la normal. Se obtiene en estos casos que μ esta en 96 de los 100 intervalos con σ conocido, y en 98 de 100 de los intervalos con σ desconocido. Si hacemos tender a infinito el **número de simulaciones** ambos deben converger por la LGN a 0.95 exactamente, pues son IC de nivel exacto.

Relación con Tests (bilaterales): El intervalo de confianza nos da **evidencia estadística** sobre la posición de el parámetro μ. Concretamente volviendo al ejemplo en a) si queremos saber si el parámetro μ es igual a $\mu_0 = 2$ o no, podemos calcular el intervalo de confianza, en la muestra nos da $IC_{obs} = [2.58, 3.82]$ y como μ_0 no pertenece al intervalo decimos que hay evidencia estadística para decir que $\mu \neq \mu_0$. De hecho nos da la misma evidencia que un test. Esto se debe al siguiente resultado:

Theorem 1.1. Sea $IC(\underline{X})$ un intervalo de confianza de nivel exacto (resp. aproximado) $1 - \alpha$ para θ. Consideremos las hipótesis

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ vs. } H_1 : \theta \neq \theta_0$$

entonces el test que rechaza H_0 cuando $\theta_0 \notin IC(\underline{X})$ tiene nivel exacto (resp. aproximado) α.

Proof. Veamos que vale en el ejemplo. Este test rechaza $H_0 : \mu = \mu_0$ si $\mu_0 \notin [\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}]$. Cuál es la probabilidad de que esto ocurra bajo H_0, es decir cuando $\mu = \mu_0$?

$$P_{H_0}(\mu_0 \notin [\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}]) = 1 - P_{H_0}(\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \leqslant \mu_0 \leqslant \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}) = 1 - (1 - \alpha) = \alpha$$

pues usamos que bajo H_0 $\mu = \mu_0$ en el último paso.

Podemos calcular explicitamente la región de rechazo de este test volviendo para atrás la cuenta del intervalo, es decir volviendo al pivote:

$$P_{H_0}(\mu_0 \notin [\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}]) = P_{H_0}(|\sqrt{n}\frac{(\overline{X}_n - \mu_0)}{\sigma_0}| > z_{\frac{\alpha}{2}})$$

luego el test rechaza si $T = \sqrt{n}\frac{(\overline{X}_n - \mu_0)}{\sigma_0}$ es mayor que $z_{\frac{\alpha}{2}}$ en módulo, equivalentemente rechaza si $\overline{X}_n > \mu_0 + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$ o bien $\overline{X}_n < \mu_0 - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$. □