Clase práctica 6

Nahuel Arca

06 de septiembre de 2018

0.1. Notas

0.1.1. Esperanza y varianza de v.a. discretas

Sea X una v.a. discreta que toma valores en R_X con función de probabilidad puntual $p_X(x)$, la esperanza o valor esperado de X se define como

$$E(X) = \mu_X = \sum_{x \in R_x} x p_X(x)$$

Notar que si repetimos N veces el experimento aleatorio, con N grande, X tomará el valor x aproximadamente $Np_X(x)$ veces, por lo que el promedio de los valores que toma la v.a. X sería

$$\frac{1}{N} \sum_{x \in R_x} x N p_X(x) = \sum_{x \in R_x} x p_X(x) = E(X)$$

Propiedades:

1. Si h es una función real, $h(X)$ $(h \circ X)$ es una v.a. discreta y
$$E(h(X)) = \sum_{x \in R_x} h(x) p_X(x)$$
2. (Linealidad) Si a y b son constantes reales, entonces $E(aX+b) = aE(X)+b$.
3. Si $P(X = c) = 1$, entonces $E(X) = c$.

La varianza de X se define como $V(X) = E((X - \mu_X)^2)$, y el desvío estándar como $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$.

Propiedades:

1. $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
2. $V(aX + b) = a^2 V(X)$ y $\sigma_{aX+b} = |a|\sigma_X$.
3. Si $P(X = c) = 1$, entonces $V(X) = 0$.

0.1.2. Distribución de Bernoulli

Se arroja una moneda cargada, que cumple $P(\text{cara}) = p$ para cierto $p \in (0,1)$. Sea X la variable aleatoria

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega = \text{cara} \\ 0 & \text{si } \omega = \text{ceca} \end{cases}$$

La distribución de esta variable aleatoria se conoce con el nombre de distribución de Bernoulli de parámetro p.
De una urna que contiene N bolillas, D de ellas blancas y las restantes negras, se extrae una bolilla.

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega = B \\ 0 & \text{si } \omega = N \end{cases}$$

La distribución de X es de Bernoulli de parámetro D/N.

0.1.3. Distribución Binomial

Se arroja la moneda cargada n veces. Sea X la cantidad de caras. La distribución de esta variable aleatoria se conoce con el nombre de distribución Binomial de parámetros n y p, y se denota $X \sim \text{Bi}(n,p)$.

Propiedades:

- $R_X = \{0, \cdots, n\}$
- $p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
- $E(X) = np$ y $V(X) = np(1-p)$

De la urna se extraen n bolillas con reposición. Sea X la cantidad de bolillas blancas extraídas. La distribución de X es Binomial de parámetros n y D/N.

0.1.4. Distribución Hipergeométrica

De la urna se extraen n bolillas sin reposición, con $n \leq N$. Sea X la cantidad de bolillas blancas extraídas. La distribución de esta variable aleatoria se conoce con el nombre de distribución Hipergeométrica de parámetros n, N y D, y se denota $X \sim \text{H}(n, N, D)$.

Propiedades:

- $R_X = \{\text{máx}(0, n-(N-D)), \cdots, \text{mín}(n, D)\}$
- $$p_X(k) = \frac{\binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

- $$E(X) = n\frac{D}{N} \qquad \text{y} \qquad V(X) = \frac{N-n}{N-1} n \frac{D}{N}\left(1 - \frac{D}{N}\right)$$

Notar que si N y D son grandes en comparación con n, la extracciones con y sin reposición tienen distribuciones similares, pues la cantidad de bolillas extraídas no es lo suficientemente grande como para perturbar significativamente la proporción de los colores. Luego, en tal caso $\mathrm{H}(n, N, D) \approx \mathrm{Bi}(n, D/N)$.

0.2. Resolución de los ejercicios

1. a)

$$\begin{aligned} p_X(36) = p_X(40) = p_X(44) &= \frac{1}{3} \\ E(X) &= \frac{36}{3} + \frac{40}{3} + \frac{44}{3} = 40 \\ E(X^2) &= \frac{36^2}{3} + \frac{40^2}{3} + \frac{44^2}{3} = \frac{4832}{3} \\ V(X) &= \frac{4832}{3} - 40^2 \approx 10{,}667 \end{aligned}$$

b)

$$p_Y(36) = \frac{36}{120} \qquad p_Y(40) = \frac{40}{120} \qquad p_Y(44) = \frac{44}{120}$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{36^2}{120} + \frac{40^2}{120} + \frac{44^2}{120} = \frac{604}{15} \approx 40{,}27 \\ E(Y^2) &= \frac{36^3}{120} + \frac{40^3}{120} + \frac{44^3}{120} = 1632 \\ V(Y) &= 1632 - \left(\frac{604}{15}\right)^2 \approx 10{,}596 \end{aligned}$$

2. a) $X \sim \mathrm{Bi}(10, 0{,}01)$

   b) $E(X) = 0{,}1$ y $V(X) = 0{,}099$

   c)

$$1 - p_X(0) - p_X(1) = 1 - 0{,}99^{10} - 10 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99^9 \approx 0{,}004$$

   d)

$$E(Y) = 10(p_X(0) + p_X(1)) \approx 9{,}96$$

3. a) $X \sim \mathrm{H}(3, 10, 4)$, $E(X) = 1{,}2$ y $V(X) = 0{,}56$.

   b) $X \sim \mathrm{H}(3, 10, 1)$, $E(X) = 0{,}3$ y $V(X) = 0{,}21$.

c)

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|L_4)P(L_4) + P(A|L_1)P(L_1) \\ &= \frac{\binom{4}{0}\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} 0{,}3 + \frac{\binom{1}{0}\binom{9}{3}}{\binom{10}{3}} 0{,}7 = 0{,}54 \\ 1 - P(A) &= 0{,}46 \end{aligned}$$