Probabilidad y Estadística (C).
Clase Práctica 24: Markov en el labo.

1. Modelo de difusión de Bernoulli-Laplace. Considere dos urnas, cada una de ellas conteniendo m bolitas; b de ellas son negras y las restantes $(2m - b)$ son rojas. Decimos que el sistema está en estado i si la primera urna contiene exactamente i bolitas negras y $m - i$ rojas, mientras que la segunda contiene $b - i$ negras y $(m - b + i)$ bolitas rojas. Cada experimento consiste en elegir una bolita al azar de cada urna e intercambiarlas. Sea X_n el estado del sistema después de n intercambios. Defina los parámetros al principio del código para poder ir cambiándolos. Comenzar con $m = 50$ y $b = 40$.
   (a) Discutir por qué (X_n) es una cadena de Markov y calcular su probabilidad de transición.
   (b) Verificar que la distribución estacionaria (e invariante) está dada por
   $$\pi(i) = \frac{\binom{b}{i}\binom{2m-b}{m-i}}{\binom{2m}{m}}$$
   Hacerlo tomando potencias de la matriz de transicin hasta que la distancia sea menor a ε y resolviendo el sistema lineal asociado.
   (c) ¿Puede dar una explicación intuitiva de por qué la fórmula anterior corresponde a la distribución estacionaria?
   (d) Si la cantidad de negras y rojas es la misma y comienzan todas juntas. ¿Cuánto tiempo hay que esperar en promedio para que volver a ese estado?