

Probabilidad y Estadística (C).

Clase Práctica 14: Máximo, Tchebychev, LGN y más.

1. María tiene tres hijos, sean

$$\begin{aligned}X_1 &= \text{tiempo (en horas) que duerme Ana} \\X_2 &= \text{tiempo (en horas) que duerme Benjamín} \\X_3 &= \text{tiempo (en horas) que duerme Celeste}\end{aligned}$$

Como canta muy lindo, ella logra que sus tres hijos se duerman al mismo tiempo. Cuando alguno se despierta, María se despierta. Asumiendo que ella se duerme 10 minutos después que sus hijos y que las X_i son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con $X_i \sim \varepsilon(\frac{1}{7})$

- a) Escribir a la variable $Y = \text{tiempo (en horas) que duerme María, en función de las } X_i$.
 - b) Hallar F_Y y f_Y
 - c) Comparar $E(X_i)$ con $E(Y)$
 - d) Generalizar el item b) en el caso de tener n variables $X_1, \dots, X_n$ i.i.d.
2. Sean $X \sim \varepsilon(\lambda)$ y $Y \sim \varepsilon(\lambda)$ variables aleatorias independientes. Hallar la distribución de $W = X + Y$ de dos maneras distintas; planteando la función de distribución de W y usando función generadora de momentos.
 3. En el juego de la ruleta se apuesta \$ 1 a un número. Si ese número sale, la banca le devuelve al apostador el peso apostado y \$ 35 más. Si el número ganador resulta ser otro el jugador pierde el peso apostado. Consideremos las variables aleatorias

$G_i = \text{"Ganancia obtenida por el jugador al apostar la } i\text{-ésima vez"}$.

- a) Hallar la distribución de G_i .
 - b) Hallar la ganancia esperada (μ) en una apuesta.
 - c) ¿Cuánto es la ganancia esperada en 10 apuestas?
 - d) ¿A qué valor tiende la ganancia promedio en n apuestas cuando $n \rightarrow \infty$?
 - e) Acotar la probabilidad de que en 100 apuestas la ganancia promedio esté a más de dos desvíos estándar, $\sigma_{\bar{G}_{100}}$, de μ .
4. Sea $(U_i)_{i \in N}$ una sucesión de variables aleatorias uniformes en $[0, 1]$. Definimos $N = \inf\{n \in N : \sum_{i=1}^n U_i \geq 1\}$. Calcular $E(N)$.
 5. Sea X una variable aleatoria con $E(X) < \infty$ y $Var(X) < \infty$.
 - a) ¿Qué se puede decir de la variable aleatoria $\bar{X}_n$ cuando n es grande?
 - b) ¿Qué se puede decir de la variable aleatoria S_n cuando n es grande?
 6. La rana Anastasia duerme todas las noches en un pozo de un metro de profundidad. Cada mañana intenta saltar fuera del pozo. La altura en metros de cada salto de la rana tiene distribución exponencial con parámetro 2 (las laturas de los distintos saltos son independientes). Si al tercer salto no logra salir, decide quedarse descansando en el pozo el resto del día.
 - a) Hallar la función de probabilidad puntual de la variable aleatoria $W = \text{número de saltos en un día}$.
 - b) Hallar la probabilidad de que en 80 días, Anastasia haya dado más de 210 saltos.
 - c) Hallar la probabilidad de que en 80 días, Anastasia haya salido del pozo menos de 20 veces.