Probabilidades y Estadística (C)

1. Suponga que Y_1, Y_2, Y_3 denotan una muestra aleatoria de una distribución exponencial con función de densidad

$$f(y) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{y}{\theta}} I_{(0,+\infty)}(y)$$

   Considere los siguientes cinco estimadores de θ:

$$\hat{\theta}_1 = Y_1 \quad \hat{\theta}_2 = \frac{Y_1 + Y_2}{2} \quad \hat{\theta}_3 = \frac{Y_1 + 2Y_2}{3} \quad \hat{\theta}_4 = \text{mín}(Y_1, Y_2, Y_3) \quad \hat{\theta}_5 = \overline{Y}$$

   a) ¿Cuáles de estos estimadores son insesgados?

   b) Entre los estimadores insesgados, ¿cuál tiene la varianza más pequeña?

2. Sea $Y_1, \ldots, Y_n$ una muestra aleatoria de tamaño n de una población cuya densidad está dada por

$$f(y) = \frac{\alpha}{\theta^\alpha} y^{\alpha-1} I_{[0,\theta]}(y)$$

   donde $\alpha > 0$ es un valor fijo conocido, pero θ no se conoce. Sea $\hat{\theta}$ el EMV de θ.

   a) Hallar $\hat{\theta}$.

   b) ¿Es insesgado? De no serlo, determinar un múltiplo que lo sea.

   c) ¿Es $\hat{\theta}$ asintóticamente insesgado?

   d) Calcular la varianza de $\hat{\theta}$.

   e) ¿Es $\hat{\theta}$ consistente?

   f) ¿Cuál es el EMV de la media? ¿Y el de la varianza?

3. Suponga que $Y_1, \ldots, Y_{2k}$ es una muestra aleatoria de tamaño $2k$ de una población para la cual los primeros cuatro momentos son finitos. Considere

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2k} \sum_{i=1}^{k} (Y_{2i} - Y_{2i-1})^2$$

   a) Demuestre que $\hat{\sigma}^2$ es un estimador insesgado para σ^2.

   b) Demuestre que $\hat{\sigma}^2$ es un estimador consistente para σ^2.

   c) ¿Por qué fue necesaria la suposición de que $E(Y_1^4) < \infty$?

4. Sean $Y_1, Y_2, \ldots$ una sucesión de v.a. con $E(Y_i) = \mu$ y $V(Y_i) = \sigma_i^2$.

   a) ¿Cuál es $E(\overline{Y}_n)$?

   b) ¿Cuál es $V(\overline{Y}_n)$?

   c) ¿En qué condición (en las σ_i^2) se puede garantizar que $V(\overline{Y}_n)$ tiende a 0? Notar que esto implica que $\overline{Y}_n$ es un estimador consistente para μ.