

Probabilidades y Estadística (C)

1. Denote con Y_1 el peso (en toneladas) de un artículo a granel que un proveedor tiene en existencia al principio de una semana y suponga que $Y_1 \sim U(0, 1)$. Denote con Y_2 la cantidad (en peso) de este artículo vendido por el proveedor durante la semana y suponga que $Y_2|Y_1 = y_1 \sim U(0, y_1)$.
 - a) Encuentre la función de densidad conjunta para Y_1 y Y_2 .
 - b) Si el proveedor tiene en existencia media tonelada del artículo, ¿cuál es la probabilidad de que venda más de un cuarto de tonelada?
 - c) Si se sabe que el proveedor vendió un cuarto de tonelada del artículo, ¿cuál es la probabilidad de que hubiera tenido en existencia más de media tonelada?
2. Suponga que una partícula radiactiva se coloca aleatoriamente en un cuadrado con lados de longitud unitaria. Un modelo razonable para la función de densidad conjunta para Y_1 y Y_2 es $f(y_1, y_2) = I_{[0,1]}(y_1)I_{[0,1]}(y_2)$. Calcule $E(Y_1 - Y_2)$, $E(Y_1 Y_2)$, $E(Y_1^2 + Y_2^2)$ y $V(Y_1 Y_2)$.
3. Sea (Y_1, Y_2) un vector aleatorio uniformemente distribuido sobre el triángulo de vértices $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 0)$.
 - a) Encuentre $\text{cov}(Y_1, Y_2)$.
 - b) ¿ Y_1 y Y_2 son independientes?
 - c) Encuentre el coeficiente de correlación para Y_1 y Y_2 .
 - d) ¿La respuesta al inciso b lo lleva a dudar de su respuesta al inciso a? ¿Por qué sí o por qué no?
4. Un experimento de aprendizaje requiere que una rata corra por un laberinto (una red de pasillos) hasta que localice una de tres posibles salidas. La salida 1 presenta una recompensa de alimento, no así las salidas 2 y 3. (Si la rata finalmente selecciona la salida 1 casi siempre, puede tener lugar el aprendizaje.) Denote con Y_i el número de veces que la salida i es seleccionada en corridas sucesivas. Para lo siguiente, suponga que la rata escoge una salida aleatoriamente en cada corrida.
 - a) Encuentre la probabilidad de que $n = 6$ corridas resulte en $Y_1 = 3$, $Y_2 = 1$ y $Y_3 = 2$.
 - b) Para n general, encuentre $E(Y_1)$ y $V(Y_1)$.
 - c) Encuentre $\text{cov}(Y_2, Y_3)$ y $\rho(Y_2, Y_3)$ para n general.
 - d) Para comprobar la preferencia de la rata entre las salidas 2 y 3, podemos analizar $Y_2 - Y_3$. Encuentre $E(Y_2 - Y_3)$ y $V(Y_2 - Y_3)$ para n general.