

Práctica 1

Introducción a los números complejos

1. Representar gráficamente los números: $z, w, z + w, z - w, \bar{z}, \bar{w}, zw$, para:

a) $z = 2i, w = \frac{3}{2} - i$

b) $z = -\sqrt{3} + i, w = \sqrt{3}$

2. **a)** Sea $z \in \mathbb{C}$, probar:

i) $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|, |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$

ii) $2|\operatorname{Re}(z)||\operatorname{Im}(z)| \leq |z|^2$

iii) $|z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| \leq \sqrt{2}|z|$

iv) $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ si $z \neq 0$

v) $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

b) Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, probar que:

i) $|z_1||z_2| \geq \frac{1}{2}(z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2)$

ii) $|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

iii) $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

3. Calcular los módulos y los argumentos de los siguientes números complejos:

a) $3 + \sqrt{3}i$

b) $(-1 - i)^{-1}$

c) $(2 + 2i)(\sqrt{3} - i)$

d) $(-1 - \sqrt{3}i)^5$

e) $(-1 - \sqrt{3}i)^{-5}$

f) $\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i}$

4. Determinar la forma binomial de los siguientes números complejos:

(a) $z = \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i}\right)^{17}$.

(b) $z_n = (-1 + \sqrt{3}i)^n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

5. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $|z| - z = 1 + 2i$

b) $z\bar{z} - 2|z| + 1 = 0$

c) $z^6 + 2 = 0$

d) $z^4 - 1 - i = 0$

6. a) Probar la fórmula de resolución de las ecuaciones de segundo grado:

$$az^2 + bz + c = 0$$

donde $a, b, c \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0$

- b) Resolver: $z^2 - (2i + 4)z + 10i - 5 = 0$

7. Probar que si $c \in \mathbb{R}_{>0}$, la ecuación $|z - 1| = c|z + 1|$ representa una circunferencia o una recta.

Representar gráficamente: $|z - 3| = 2|z + 3|$ y $|z - 3| < 2|z + 3|$

8. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C}$, probar que $\alpha z\bar{z} + cz + \bar{c}z + \beta = 0$ representa una circunferencia, una recta, un punto o el conjunto vacío y probar que toda circunferencia o recta puede escribirse de esta forma.

Definición: Una homografía es una función del tipo: $H(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, donde $ad - bc \neq 0$. Observe que si $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, este tipo de funciones están bien definidas en $\hat{\mathbb{C}}$, y además resultan biyecciones: $H : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$.

Además, decimos que la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ representa a la homografía T .

9. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ matrices no singulares que respresentan a homografías T_1 y T_2 respectivamente.

- (a) ¿Qué homografía representa la matriz AB ?
 (b) ¿Qué homografía representa la matriz A^{-1} ?
 (c) ¿Qué homografías representan las matrices diagonales?
 (d) ¿Cuándo dos matrices distintas representan la misma homografía?

10. a) Dadas las funciones

$$t(z) = z + c, c \in \mathbb{C} \text{ fijo (traslación)}$$

$$h(z) = a(z - z_0) + z_0, \text{ con } a \in \mathbb{C}_{\neq 0}, z_0 \in \mathbb{C} \text{ (homotecia de centro } z_0 \text{ y razón } a)$$

$$i(z) = \frac{1}{z}, z \neq 0 \text{ (inversión)}$$

describirlas geoméricamente. ¿Cuál es la imagen, por cada una de ellas, de una circunferencia y de una recta?

- b) Probar que $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tales que $ad - bc \neq 0$ se escribe como composición de funciones del tipo de las dadas en a). Deducir cuál es la imagen por f de una circunferencia o de una recta.

- c) Verificar que $g(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$ es la homografía inversa de $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$.

11. Determinar la imagen de las siguientes regiones bajo la homografía indicada:

- a) el disco $\{z : |z| < 1\}$ por $f(z) = \frac{2z - i}{2 + iz}$.
- b) el medio-disco $\{z : \text{Im}(z) > 0 \text{ y } |z| < 1\}$ por $f(z) = \frac{2z - i}{2 + iz}$.
- c) el cuadrante $\{z : \text{Re}(z) > 0 \text{ e } \text{Im}(z) > 0\}$ por $f(z) = \frac{z - i}{z + i}$.

12. Describir geoméricamente la región determinada por cada una de las siguientes condiciones.

Decidir si son abiertas o cerradas y si son o no conexas.

- a) $|\text{Im}(z)| > 1$ b) $\text{Re}(z - iz) \leq 2$ c) $|z - 1 + 3i| \leq 1$
- d) $-\pi < \text{Arg}(z) < \pi, |z| > 2$ e) $|z - 4| > 3$ f) $1 < |z - 2i| \leq 2$
- g) $0 \leq \text{Arg}(z^2) \leq \frac{\pi}{4} \quad (z \neq 0)$ h) $\text{Im}(z^2) > 0$ i) $\text{Re}(\frac{1}{z}) < \frac{1}{2}$

13. **Tema complementario:** estudiar la representación esférica de los números complejos (Esfera de Riemann/proyección estereográfica). Se sugiere la sección 2.4 del capítulo 1 del libro de Ahlfors o la sección 6 del capítulo 1 del libro de Conway (ver bibliografía). Piense en la relación de esta esfera con el plano complejo extendido:

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

Analice a que se corresponden las siguientes regiones del plano complejo sobre la esfera de Riemann (para cada $r \in \mathbb{R}_{>0}$):

- a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$
- b) $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$
- c) $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$
- c) $\{z \in \mathbb{C} : a\text{Re}(z) + b\text{Im}(z) + c = 0\}$, para cada terna de números reales a, b, c .

En función de estos resultados ¿a qué tipo de regiones del plano complejo llamaría entornos del infinito?