①

Teorica 30-8

Rto: teníamos
- espacios vectoriales
- subespacios
- combinaciones lineales
- subespacio generado.

Independencia lineal

Prop: $S \subseteq V$ subespacio

$\{v_1, \dots, v_n\}$ $v_i \in V$

$\rightarrow$ $\langle\{v_1 \dots v_n\}\rangle \subseteq S \iff v_i \in S$ $\forall i = 1 \dots n$

el subespacio generado por $\{v_1 \dots v_n\}$

Dem:

$\Leftarrow)$ Si $v_i \in S$ $\forall i = 1 \dots n$ $\rightarrow$ $\langle\{v_1 \dots v_n\}\rangle \subset S$

$$\langle\{v_1 \dots v_n\}\rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \quad a_i \in K \right\}$$

✓

$\Rightarrow)$ Si $\langle\{v_1 \dots v_n\}\rangle \subseteq S$

$\rightarrow$ $v_i \in \langle\{v_1 \dots v_n\}\rangle \subseteq S \rightarrow v_i \in S$ ✓

Corolario: $\langle\{v_1 \dots v_n, v_{n+1}\}\rangle = \langle\{v_1 \dots v_n\}\rangle$

$\iff v_{n+1} \in \langle\{v_1 \dots v_n\}\rangle$

Dem: Ejercicio

2

Def. (independencia lineal) (l.I.)

$\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente si

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0 \Rightarrow a_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Obs.: $\{v_1, \dots, v_n\}$ l.I.

$$\Longleftrightarrow \quad v_j \notin \langle \{v_1, \dots, \cancel{v_j}, \dots, v_n\} \rangle$$

(ningún v_i es combinación de los demás $\{v_1, \dots, \cancel{v_i}, \dots, v_n\}$.)

Bases y dimensión

Def. $\mathbb{V}$ esp. vectorial

$\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{V}$ si

1) $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente

2) $\langle \{v_1, \dots, v_n\} \rangle = \mathbb{V}$.

Teorema $\langle \{v_1, \dots, v_n\} \rangle = \mathbb{V}$

y $\{w_1, \dots, w_r\}$ l.I. en $\mathbb{V}$

$$\Rightarrow \boxed{r \leq n}$$

(3) Dem:

Como $W = \langle \{v_1 \dots v_n\} \rangle$

$\to \exists\ \alpha_{ij} \in K$ tq $w_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} v_i$

$1 \leq j \leq r$
$1 \leq i \leq n$

Consideremos el sistema lineal

$$(*) \quad \sum_{k=1}^{r} \alpha_{ik} x_k = 0 \qquad i = 1 \dots n \qquad x_k = \underset{\text{incognitas}}{?}$$

Sea $(\beta_1 \dots, \beta_r)$ una solución del sistema, se tiene

$$\sum_{k=1}^{r} \beta_k w_k = \sum_{k=1}^{r} \beta_k \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} v_i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{r} \beta_k \alpha_{ik} \right)}_{=0} v_i$$

$= 0$

$\to$ (dado que $\{w_1 \dots w_r\}$ son l_I)

debemos tener $\beta_1 = 0 \dots \beta_r = 0$.

Es decir, el sistema $(*)$ tiene solución única.
Entonces la cantidad de ecuaciones es mayor o igual que la cantidad de incognitas, es decir $\boxed{n \geq r}$, $\square$

Corolario: $\{v_1 \dots v_n\}$ y $\{w_1 \dots w_s\}$ base de W

$\to$ $\boxed{n = s}$

dem: $\{v_1 \dots v_n\}$ l_I y $\langle \{w_1 \dots w_s\} \rangle = W$

$\Rightarrow$ $\underline{n \leq s}$

$\{w_1 \dots w_s\}$ l_I y $\langle \{v_1 \dots v_n\} \rangle = W$ $\to$ $\underline{n \geq s}$

4

Def: (dimensión)

$\mathbb{V}$ esp. vectorial

$\Rightarrow \dim(\mathbb{V}) = \#(\underbrace{\{v_1 \dots v_n\}}_{\text{base de } \mathbb{V}})$

Prop: $\{v_1, \dots, v_n\}$ base de $\mathbb{V}$

Dado $w \in \mathbb{V}$ existen únicos α_i tq $(\alpha_i \in K)$

$$w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

Dem: Ejercicio

Prop: (a) $\langle\{v_1 \dots v_n\}\rangle = \mathbb{V}$

$\Rightarrow \exists \underbrace{\{v_1 \dots v_s\}}_{\text{un subconjunto de los anteriores}}$ base de $\mathbb{V}$

(b) $\{w_1 \dots w_s\}$ l.I. en $\mathbb{V}$

$\Rightarrow \exists \{w_1 \dots w_s, w_{s+1} \dots w_n\}$ base de $\mathbb{V}$.

Dem: (a) Si $\{v_1 \dots v_n\}$ son l.I. listo ✓

Si no, $\exists v_j \in \langle\{v_1, \dots, \cancel{v_j}, \dots, v_n\}\rangle$, quitamos este v_j

y seguimos, si $\{v_1, \dots, \cancel{v_j}, \dots, v_n\}$ es l.I. listo ✓

Si no, ... etc.

(5) (b)

Sea $\{z_1 \ldots z_n\}$ base de W

$G_0 = \langle w_1 \ldots w_s \rangle$

si $z_i \notin G_0$ lo agregamos $\{w_1 \ldots w_s, z_i\}$

sea $G_1 = \langle G_0 ; z_i \rangle$

si algún otro $z_j \notin G_1$ lo agregamos

etc..

al final

$$W = \langle \{z_1 \ldots z_n\} \rangle \subset \langle \underbrace{\{w_1 \ldots w_s\, z_i\, z_j \ldots\}}_{\text{l.I.}} \rangle$$

base de W. — $\square$

Prop: S, T subespacios de W

1) $S \subseteq T \rightarrow \dim(S) \leq \dim(T)$

2) $S \subseteq T$ $\dim(S) = \dim(T) \Rightarrow \underline{S = T}$.

Dem: (Ejercicio)

Def: Suma de subespacios

S, T subespacios

$$S + T = \{ s + t \;;\; s \in S \quad t \in T \}$$

es un subespacio de W.

(Ejercicio: verificar esto!!)

(6)

Obs $S \cap T$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

$\boxed{\text{Teorema de la dimensión}}$

S, T subespacios de $\mathbb{V}$

$$\boxed{\dim(S+T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T)}$$

Dem: Si $\dim(S) = 0 \Leftrightarrow S = \{0\}$

$\Rightarrow S + T = T \quad S \cap T = \{0\}$

y la igualdad vale ✓

Idem si $\dim(T) = 0 \Leftrightarrow T = \{0\}$ ✓

Sea $\{v_1 \dots v_r\}$ base de $S \cap T$ (si $S \cap T = \{0\}$ $\Rightarrow$ ponemos el conjunto vacío como base)

$\{v_1 \dots v_r \; w_{r+1} \dots w_s\}$ base de S

$\{v_1 \dots v_r \; z_{r+1} \dots z_n\}$ base de T

extendemos a base de S y de T

Tenemos que

$\{v_1 \dots v_r \; w_{r+1} \dots w_s \; z_{r+1} \dots z_n\}$ es base de $S+T$

(Ejercicio!!!)

$\Rightarrow$

$$\underbrace{s + n - r}_{\dim(S+T)} = \underbrace{s}_{\dim(S)} + \underbrace{n}_{\dim(T)} - \underbrace{r}_{\dim(S \cap T)} \quad \square$$

(7) Suma directa

$S \oplus T = \mathbb{V}$ (S y T están en suma directa)

si 1) $S + T = \mathbb{V}$

2) $S \cap T = \{0\}$

Prop: $\mathbb{V} = S \oplus T$

$\Rightarrow$ dado $w \in \mathbb{W}$ existen únicos $s \in S$, $t \in T$

tales que $w = s + t$.

Dem: (Ejercicio)

Transformaciones lineales

Def: Sean $(\mathbb{V}; +_v, \cdot_v)$ esp vectorial
($+_v$ = suma en $\mathbb{V}$
$\cdot_v$ = mult en $\mathbb{V}$ por $\mathbb{K}$)

$(\mathbb{W}; +_w, \cdot_v)$ esp vectorial

$T: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ se dice una transf. lineal

si 1) $T(v +_v \hat{v}) = T(v) +_w T(\hat{v})$

2) $T(\alpha \cdot_v v) = \alpha \cdot_w T(v)$

(8) <u>Prop:</u>

$T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ transf lineal

1) S subespacio de $\mathbb{V} \Rightarrow T(S)$ subespacio de $\mathbb{W}$.

2) $\hat{S}$ subespacio de $\mathbb{W} \Rightarrow T^{-1}(\hat{S})$ subespacio de $\mathbb{V}$.

<u>Dem:</u> (Ejercicio)