

## MATEMATICA 2 - 2 Cuatrimestre de 2018

### Práctica 8 - Formas bilineales

**Ejercicio 1.** Determinar si las siguientes funciones son o no formas bilineales. En caso afirmativo calcular su matriz en la base canónica correspondiente y determinar si la forma bilineal es simétrica. Para las formas bilineales simétricas, calcular su núcleo.

- i)  $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + 3.x_2.y_1 - x_2.y_2 + 3.x_1.y_2$
- ii)  $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Phi(x, y) = -x_1.y_1 - x_2.y_1 + 2.x_2.y_2 + 2.x_1.y_2$
- iii)  $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Phi(x, y) = x_1^2 + x_2.y_1 + x_1.y_2 - x_2^2$
- iv)  $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + x_3.y_3 - x_1.y_3 - x_3.y_1$
- v)  $\Phi : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\Phi(x, y) = x_1.y_1 + (2+i).x_2.y_1 + 2.x_2.y_2 + (2+i).x_1.y_2 + x_1.y_3 + x_3.y_1 - x_3.y_3$
- vi)  $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Phi(x, y) = (3.x_1 + x_2 - x_3).(4.y_2 + 2.y_3)$

**Ejercicio 2.** Probar que las siguientes funciones son formas bilineales ( $K = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ):

- i)  $\Phi : K^n \times K^n \rightarrow K$ ,  $\Phi(x, y) = x.A.y^t$ , donde  $A \in K^{n \times n}$ .
- ii)  $\Phi : K^{m \times n} \times K^{m \times n} \rightarrow K$ ,  $\Phi(A, B) = \text{tr}(A^t.C.B)$ , donde  $C \in K^{m \times m}$ .

**Ejercicio 3.** Hallar una forma bilineal simétrica  $\Phi$  en  $\mathbb{R}^3$  tal que  $\text{Nu}(\Phi) = \langle (1, 2, -1) \rangle$  y  $\Phi((1, 1, 1), (1, 1, 1)) < 0$ . Calcular la matriz de  $\Phi$  en la base canónica.

**Ejercicio 4.** Para cada una de las formas bilineales reales siguientes hallar una base ortonormal tal que la matriz de la forma bilineal en dicha base sea diagonal. Calcular signatura y rango, decidir si es degenerada o no, definida (positiva o negativa), semidefinida (positiva o negativa) o indefinida.

- i)  $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $|\Phi|_E = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$
- ii)  $\Phi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + 2.x_1.y_3 + 2.x_3.y_1 - x_3.y_3 - x_4.y_4$ .