MATEMATICA 2 - 2 Cuatrimestre de 2018

Práctica 7 - Espacios vectoriales con producto interno

Ejercicio 1. Determinar si las siguientes funciones son o no productos internos. En caso afirmativo encontrar su matriz en la base canónica del espacio correspondiente.

i) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + 3.x_2.y_1 - x_2.y_2 + 3.x_1.y_2$

ii) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \Phi(x, y) = x_1.y_1 + x_2.y_1 + 2.x_2.y_2 - 3.x_1.y_2$

iii) $\Phi : K^2 \times K^2 \to K,\ \Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + x_2.y_2 - x_1.y_2 - x_2.y_1$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

iv) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C},\ \Phi(x, y) = 2.x_1.\overline{y}_1 + x_2.\overline{y}_2 - x_1.\overline{y}_2 - x_2.\overline{y}_1$

v) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $\Phi(x, y) = 2.x_1.\overline{y}_1 + (1 + i).x_1.\overline{y}_2 + (1 + i).x_2.\overline{y}_1 + 3.x_2.\overline{y}_2$

vi) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C},\ \Phi(x, y) = x_1.\overline{y}_1 - i.x_1\overline{y}_2 + i.x_2\overline{y}_1 + 2.x_2.\overline{y}_2$

vii) $\Phi : K^3 \times K^3 \to K,\ \Phi(x, y) = 2.x_1.\overline{y}_1 + x_3.\overline{y}_3 - x_1.\overline{y}_3 - x_3.\overline{y}_1$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

Ejercicio 2. Probar que las siguientes funciones definen productos internos sobre los espacios vectoriales considerados:

i) $\langle\, ,\rangle : K^{n\times n} \times K^{n\times n} \to K,\ \langle A, B\rangle = tr(A.B^*)$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

ii) $\langle\, ,\rangle : C[0, 1] \times C[0, 1] \to \mathbb{R},\ \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x).g(x)\, dx$

iii) $\langle\, ,\rangle : K^n \times K^n \to K,\ \langle x, y\rangle = x\, Q^*Q\, \overline{y}^t$, donde $Q \in K^{n\times n}$ es una matriz inversible, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

Recordar que A^* denota la matriz *traspuesta conjugada* de A. Es decir, $A^*_{ij} = \overline{A_{ji}}$ para todo $1 \le i, j \le n$.

Ejercicio 3. Restringir el producto interno del item ii) del ejercicio anterior a $\mathbb{R}_n[X]$ y calcular su matriz en la base $B = \{1, X, \dots, X^n\}$.

Ejercicio 4. En cada uno de los siguientes casos, hallar un producto interno en V para el cual la base B resulte ortonormal.

i) $V = \mathbb{C}^2$, $B = \{(1, i), (-1, i)\}$

ii) $V = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1, -1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$

Ejercicio 5.

i) Encontrar una base de $\mathbb{R}^2$ que sea ortonormal para el producto interno definido en el ítem iii) del Ejercicio 1 para $K = \mathbb{R}$.

ii) Encontrar una base de $\mathbb{C}^2$ que sea ortonormal para el producto interno definido en el ítem vi) del Ejercicio 1.

Ejercicio 6.

i) Hallar el complemento ortogonal de los siguientes subespacios de V:

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2.x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ para el producto interno canónico.

(b) $V = \mathbb{R}^3$, $S = < (1, 2, 1) >$ para el producto interno definido por
$\langle x, y\rangle = x_1.y_1 + 2.x_2.y_2 + x_3.y_3 - x_1.y_2 - x_2.y_1$.

(c) $V = \mathbb{C}^3$, $S = < (i, 1, 1), (-1, 0, i) >$ para el producto interno canónico.

ii) Para cada uno de los subespacios del ítem anterior, hallar bases ortonormales para el producto interno considerado y definir explícitamente la proyección ortogonal sobre S.

Ejercicio 7.

i) Se considera $\mathbb{R}_3[X]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x).g(x)\ dx$.

(a) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{1,\ X,\ X^2,\ X^3\}$.

(b) Hallar el complemento ortogonal del subespacio $S = < 1 >$.

ii) Se considera $C[-1, 1]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x).g(x)\ dx$. Hallar el polinomio de grado menor o igual que 3 más próximo a la función $f(x) = \text{sen}(\pi x)$.

Sugerencia: Observar que basta considerar el subespacio $S = < 1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ \text{sen}(\pi x) >$.

iii) Se considera $C[0, \pi]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_{0}^{\pi} f(t).g(t)\ dt$.

(a) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt al conjunto $B = \{1, \cos x, \text{sen}\ x\}$.

(b) Sea S el subespacio de $C[0, \pi]$ generado por B. Hallar el elemento de S más próximo a la función $f(x) = x$.

Ejercicio 8. Calcular f^* para cada una de las transformaciones lineales siguientes:

i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, -x_1 + x_2)$

ii) $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3,\ f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + (1 - i)x_2, x_2 + (3 + 2i)x_3, x_1 + ix_2 + x_3)$

iii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $|f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ para $B = \{(1, 2, -1), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$

iv) $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X],\ f(p) = p'$, con respecto al producto interno $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x).q(x)\ dx$.

v) $f : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n},\ f(A) = P^{-1}.A.P$, donde $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es inversible y $\langle A, B\rangle = tr(A.B^*)$.

Ejercicio 9. Sea $(V, \langle, \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una tranformación lineal. Probar que $\text{Im}(f^*) = (\text{Nu}(f))^{\perp}$.