MATEMATICA 2 - 2° Cuatrimestre de 2018

Práctica 6 - Forma de Jordan

Ejercicio 1. Hallar la forma y una base de Jordan para cada una de las siguientes matrices:

I) $\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$ II) $\begin{pmatrix} 1&0&1&0&0&-1&0\\ 1&0&1&0&0&0&0\\ -1&0&-1&0&0&1&0\\ -1&-1&-1&0&0&1&0\\ 0&0&1&-1&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2. Sea $A \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ una matriz nilpotente tal que $A^5 \neq 0$ y sea $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ una base de Jordan para A. Calcular la forma y una base de Jordan para las matrices A^2, A^3, A^4 y A^5.

Ejercicio 3. Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq j \\ 1 & \text{si } i > j \end{cases} .$$

Ejercicio 4.

I) Decidir si existe una matriz $A \in \mathbb{C}^{8\times 8}$ tal que $\text{rg}(A) = 6$, $\text{rg}(A^2) = 4$, $\text{rg}(A^3) = 3$, $\text{rg}(A^4) = 1$ y $\text{rg}(A^5) = 0$ simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.

II) Decidir si existe una matriz $A \in \mathbb{C}^{16\times 16}$ tal que $\text{rg}(A) = 9$, $\text{rg}(A^2) = 5$, $\text{rg}(A^3) = 3$, $\text{rg}(A^4) = 1$ y $\text{rg}(A^5) = 0$ simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.

Ejercicio 5. Hallar la forma y una base de Jordan para cada una de las siguientes matrices:

I) $\begin{pmatrix} 1&1&-1\\ -3&-3&3\\ -2&-2&2 \end{pmatrix}$

II) $\begin{pmatrix} -4&2&10\\ -4&3&7\\ -3&1&7 \end{pmatrix}$

III) $\begin{pmatrix} 2&0&4\\ 6&0&12\\ 3&-1&0 \end{pmatrix}$

IV) $\begin{pmatrix} 0&-1&0&0&0\\ 4&4&0&0&0\\ -1&-1&3&0&-1\\ 1&1&-1&2&1\\ -1&-1&0&-1&1 \end{pmatrix}$

V) $\begin{pmatrix} 0&0&1&-2\\ 1&1&-1&2\\ 0&2&1&0\\ 0&1&0&1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 6. Sea $V \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$ el subespacio $V = < e^x, x\,e^x, x^2\,e^x, e^{2x} >$. Sea $\delta : V \to V$ la transformación lineal definida por $\delta(f) = f'$. Hallar la forma y una base de Jordan para δ.

Ejercicio 7. Para cada $a \in \mathbb{R}$, hallar la forma de Jordan de $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 3&0&8&a\\ 3&-1&6&0\\ -2&0&-5&0\\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 8. Sea $A \in \mathbb{C}^{15\times 15}$ una matriz con autovalores $\lambda_1,\ \lambda_2$ y λ_3 y que cumple:

$$\begin{array}{llll} \mathrm{rg}(A-\lambda_1 I)=13, & \mathrm{rg}(A-\lambda_1 I)^2=11, & \mathrm{rg}(A-\lambda_1 I)^3=10, & \mathrm{rg}(A-\lambda_1 I)^4=10 \\ \mathrm{rg}(A-\lambda_2 I)=13, & \mathrm{rg}(A-\lambda_2 I)^2=11, & \mathrm{rg}(A-\lambda_2 I)^3=10, & \mathrm{rg}(A-\lambda_2 I)^4=9, \\ \mathrm{rg}(A-\lambda_3 I)=13, & \mathrm{rg}(A-\lambda_3 I)^2=12, & \mathrm{rg}(A-\lambda_3 I)^3=11. & \end{array}$$

Hallar su forma de Jordan.

Ejercicio 9. Encontrar subespacios de dimensión 1, 2 y 3 que sean A-invariantes para

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 10. Sea $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcular A^n para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 11. Sean A, $B \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Decidir si A y B son semejantes.

Ejercicio 12. Sean α, $\beta \in \mathbb{R}$. Se define la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_0=\alpha,\ a_1=\beta \\ a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n \quad \forall\ n\in\mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Hallar una fórmula general para el término a_n, $\forall\ n \in \mathbb{N}_0$. ¿Funciona el mismo método del Ejercicio 9 de la Práctica 5?

Ejercicio 13. Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t)=3x(t)-y(t) \\ y'(t)=x(t)+y(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0)=1$, $y(0)=2$. ¿Funciona el mismo método del Ejercicio 10 de la Práctica 5?

Ejercicio 14. Sea $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

I) Calcular e^{At} para $t \in \mathbb{R}$.

II) Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + y(t) \\ y'(t) = -x(t) + y(t) \\ z'(t) = -x(t) - y(t) + 3z(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = 1$, $y(0) = -1$, $z(0) = 2$.