Matemática 2 - Segundo Cuatrimestre 2018

Práctica 1 - Repaso de matrices y de sistemas de ecuaciones lineales

En todas las prácticas, $K = \mathbb{R}$ (los números reales) o $\mathbb{C}$ (los números complejos).

Ejercicio 1. Para los siguientes $z \in \mathbb{C}$, hallar $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $\overline{z}$, $|z|$, z^{-1} y $\mathrm{Re}(-iz)$.

a) $z = (2+i)(1+3i)$

b) $z = 5i(1+i)^4$

c) $z = \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}i\right)^2 \left(\overline{1-3i}\right)$

d) $z = i^{17} + \frac{1}{2}i(1-i)^3$

Ejercicio 2. Hallar todas las soluciones en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$ de las siguientes ecuaciones.

a) $x^2 = 5$

b) $x^2 + 1 = 0$

c) $x^2 = -5$

d) $\frac{1}{2}x^2 + x = 4$

e) $x^2 - 2x + 2 = 0$

f) $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

Ejercicio 3. Cuando sea posible, calcular $A+2B$, $A\,B$ y $B\,A$. ¿Vale la igualdad entre estos productos?

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$,

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4. Exhibir matrices $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B \neq 0$, tales que $A^2 = -\mathrm{Id}$ y $B^2 = 0$.

Ejercicio 5. En cada caso, mostrar con un ejemplo que existen matrices A, B y $C \in K^{n\times n}$, con $n = 2$, para las cuales vale lo siguiente:

a) $(AB)^2 \neq A^2B^2$,

b) $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ ó $B = 0$,

c) $AB = AC$ y $A \neq 0 \not\Rightarrow B = C$,

d) $AB = 0 \not\Rightarrow BA = 0$,

e) $A^j = 0$ para algún $j \geq 2 \not\Rightarrow A = 0$,

f) $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

Ejercicio 6. Si A es una matriz con una fila de ceros, ¿es cierto que para toda matriz B, AB tiene una fila de ceros? (siempre que AB esté definido.) ¿Vale lo mismo con columnas?

Ejercicio 7. Probar que si $A, B \in K^{n\times n}$ satisfacen que $A\,x = B\,x, \forall\, x \in K^n$, entonces $A = B$.

Ejercicio 8. Sea $A \in K^{n\times n}$ una matriz inversible y sean B, $C \in K^{n\times m}$. Probar:

a) $AB = AC \;\Rightarrow\; B = C$

b) $AB = 0 \;\Rightarrow\; B = 0$.

Ejercicio 9. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa para matrices A, $B \in K^{n\times n}$. Justificar:

a) A, B inversibles $\Rightarrow A + B$ inversible,

b) A nilpotente (es decir, $\exists\, j \in \mathbb{N} \;/\; A^j = 0$) $\Rightarrow A$ no es inversible.

Ejercicio 10. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales sobre $\mathbb{R}$, y los sistemas homogéneos asociados.

$a)\ \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = & 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 & = & -1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 & = & 1 \end{cases}$

$b)\ \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = & 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 & = & 4 \end{cases}$

$c)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 & = & 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = & 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 & = & 0 \end{cases}$

$d)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 & = & 5 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 & = & 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 & = & 3 \end{cases}$

Verificar que en cada caso, el conjunto de soluciones del sistema no homogéneo es igual a una solución particular más el conjunto de soluciones del homogéneo asociado.

Ejercicio 11. Encontrar los coeficientes de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $(1,1)$, $(2,2)$ y $(3,0)$.

Ejercicio 12. Resolver sobre $\mathbb{C}$ los sistemas

$a)\ \begin{cases} ix_1 - (1+i)x_2 & = & 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 + 2ix_2 - x_3 & = & 0 \end{cases}$

$b)\ \begin{cases} 2x_1 + (-1+i)x_2 + x_4 & = & 2 \\ -x_1 + 3x_2 - 3ix_3 + 5x_4 & = & 1 \end{cases}$

Ejercicio 13. Determinar los valores de α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ para los cuales el siguiente sistema tiene solución:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 & = & \alpha \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 & = & \beta \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = & \gamma \end{cases}$$

Ejercicio 14. Determinar para qué valores de $a, b \in \mathbb{R}$ cada uno de los sistemas siguientes tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones. En el caso de los sistemas homogéneos, si la solución es única, ¿cuál es?

$a)\ \begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 & = & 0 \\ (a+1)x_2 + x_3 & = & 0 \\ (a^2-4)x_3 & = & 0 \end{cases}$

$b)\ \begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + ax_2 + ax_3 & = & 0 \end{cases}$

$c)\ \begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 & = & b \\ x_1 + ax_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 & = & -1 \end{cases}$

$d)\ \begin{cases} ax_1 + 2x_2 + ax_3 & = & 1 \\ ax_1 + (a+4)x_2 + 3ax_3 & = & -2 \\ -ax_1 - 2x_2 + x_3 & = & 1 \\ (a+2)x_2 + (3a+1)x_3 & = & b \end{cases}$

Ejercicio 15. Decidir si (o cuándo) las siguientes matrices son inversibles y, en caso afirmativo, exhibir sus inversas:

$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$b)\ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$c)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$d)\ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$e)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$f)\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$