Clase 10

Significado económico de las variables del dual y Análisis de Sensibilidad

En el capítulo anterior...

- Problema dual:
  - Formulación
  - Teorema Fundamental de Dualidad
  - Teorema de Holgura Complementaria

Significado económico

A las variables del problema dual puede otorgársele un significado económico: si nuestro problema original es

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_j c_j x_j \\ \text{s.a:} \quad & \sum_j a_{ij} x_j \leq & b_i \quad \forall i = 1, \cdots, m \\ & x \geq & 0 \end{aligned}$$

Entendemos que b_i es la cantidad disponible del recurso i, a_{ij} es la cantidad de recurso i que se requiere por cada unidad de producto j y c_j es la ganancia que obtenemos por cada unidad de producto j.

El problema dual se plantea como:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_i b_i y_i \\ \text{s.a:} \quad & \sum_i a_{ij} y_i \geq & c_j \quad \forall j = 1, \cdots, n \\ & y \geq & 0 \end{aligned}$$

Para que la comparación $\sum_i a_{ij} y_i \geq c_j$ tenga sentido dentro de la interpretación, podríamos pensar que y_i simboliza la ganancia por cada unidad de recurso i:

$$\frac{\text{recurso}}{\text{unidad de producto}} \cdot \frac{?}{?} = \frac{\text{ganancia}}{\text{unidad de producto}}$$

Significado económico

A las variables del problema dual puede otorgársele un significado económico: si nuestro problema original es

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_j c_j x_j \\
\text{s.a:} \quad & \sum_j a_{ij} x_j \leq \quad b_i \quad \forall i = 1, \cdots, m \\
& \qquad\quad x \geq \quad 0
\end{aligned}
$$

Entendemos que b_i es la cantidad disponible del recurso i, a_{ij} es la cantidad de recurso i que se requiere por cada unidad de producto j y c_j es la ganancia que obtenemos por cada unidad de producto j.

El problema dual se plantea como:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_i b_i y_i \\
\text{s.a:} \quad & \sum_i a_{ij} y_i \geq \quad c_j \quad \forall j = 1, \cdots, n \\
& \qquad\quad y \geq \quad 0
\end{aligned}
$$

Para que la comparación $\sum_i a_{ij} y_i \geq c_j$ tenga sentido dentro de la interpretación, podríamos pensar que y_i simboliza la ganancia por cada unidad de recurso i:

$$\frac{\text{recurso}}{\text{unidad de producto}} \cdot \frac{\textit{ganancia}}{\textit{recurso}} = \frac{\text{ganancia}}{\text{unidad de producto}}$$

Teorema

Si el problema primal

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \sum_j c_j x_j \\ \text{s.a:} \quad & \sum_j a_{ij} x_j \leq \quad b_i \quad \forall i = 1, \cdots, m \\ & \qquad x \geq \quad 0 \end{aligned}$$

tiene al menos una solución básica no degerada, luego existe $\varepsilon > 0$ que cumple la siguiente propiedad: si $|t_i| \leq \varepsilon \quad \forall i = 1, \ldots, m$ entonces el problema

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \sum_j c_j x_j \\ \text{s.a:} \quad & \sum_j a_{ij} x_j \leq \quad b_i + t_i \quad \forall i = 1, \cdots, m \\ & \qquad x \geq \quad 0 \end{aligned}$$

tiene solución óptima y el valor óptimo es igual a:

$$z^* + \sum_{i=1}^{m} t_i y_i^*$$

Donde z^* es el valor óptimo del problema primal original e y^* es la solución óptima del problema dual asociado al problema original.

Significado económico

Idea: usaremos que en el dual la región factible no cambió, por lo que basta tomar un ε lo suficientemente chico para no cambiar el vértice donde se alcanza el óptimo y luego utilizar el Teorema Fundamental de Dualidad.

Significado económico

Demo: Sabemos que en x^* se realiza el óptimo de:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.a:} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq \quad b_i \quad \forall i = 1, \cdots, m \\ & x \geq \quad 0 \end{aligned}$$

Si consideramos el siguiente problema (A):

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.a:} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq \quad b_i + t_i \quad \forall i = 1, \cdots, m \\ & x \geq \quad 0 \end{aligned}$$

y su problema dual asociado (B):

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i + \sum_{i=1}^{m} t_i y_i \\ \text{s.a:} \quad & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq \quad c_j \quad \forall j = 1, \cdots, n \\ & y \geq \quad 0 \end{aligned}$$

Significado económico

Como x^* no es solución degenerada, se tiene que el óptimo del problema original es único y, por Teorema Fundamental de Dualidad:

$$z^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

Sean $t = (t_1, \cdots, t_m)$ y B^* las columnas de A^T correspondientes a las variables básicas de y^*, los costos reducidos $\bar{\beta}$ de (B) se calculan como:

$$\begin{aligned}\bar{\beta}_R^T &= (b_R + t_R)^T - (b_B + t_B)^T B^{*-1} R = b_R^T - b_B^T B^{*-1} R + t_R^T - t_B^T B^{*-1} R \\ &= \bar{b}_R^T + t_R^T - t_B^T B^{*-1} R\end{aligned}$$

Luego, el costo reducido para cada i correspondiente a variables no básicas de y^* queda:

$$\bar{\beta}_i = \bar{b}_i + t_{R_i}^T - t_B^T (B^{*-1} R)_{\cdot i}$$

Notar que $\bar{b}_i > 0$ pues la solución no es degenerada. Para que y^* siga siendo óptimo necesitamos que los $\bar{\beta}_{R_i}$ sean no negativos.

Significado económico

Luego, basta tomar

$$\varepsilon < \min_{i:\ y_i \text{ no básica}} \{\bar{b}_i\} \cdot \frac{1}{2n \cdot ||B^{*-1}R||_\infty}$$

De esta manera, cuando se cambie a b_i por $b_i + t_i$, el óptimo del dual se alcanzará en el mismo vértice, entonces el óptimo de (B) sigue siendo y^* y el valor óptimo de (B) es:

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* + \sum_{i=1}^{m} t_i y_i^* = z^* + \sum_{i=1}^{m} t_i y_i^*$$

Luego, por Teorema Fundamental de Dualidad, el valor óptimo de (A) es

$$z^* + \sum_{i=1}^{m} t_i y_i^*$$

Significado económico

Ejemplo: supongamos que se fabrican tres productos con a partir de dos recursos: madera y vidrio. El modelo de programación lineal que permite maximizar la ganancia a partir de la disponibilidad de ambos recursos es el siguiente:

$$
\begin{array}{rrll}
\text{máx} & 2x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_3 & & (\textit{Ganancia}) \\
\text{s.a:} & 2x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 \leq & 18 & (\textit{Vidrio}) \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq & 15 & (\textit{Madera}) \\
& x_1, x_2, x_3 \geq & 0 &
\end{array}
$$

La clase pasada, vimos que la solución del problema dual es $y^* = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ y que el valor óptimo del problema primal es $z^* = 22$.

Significado económico

$$\begin{array}{rrll}
\text{máx} & 2x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_3 & & (\textit{Ganancia}) \\
\text{s.a:} & 2x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 \leq & 18 & (\textit{Vidrio}) \\
 & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq & 15 & (\textit{Madera}) \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq & 0 &
\end{array}$$

$$y^* = (\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}) \qquad z^* = 22$$

El teorema anterior nos permite ver cómo impactan **pequeñas** variaciones en la cantidad de vidrio y/o de madera en la ganancia (valor óptimo)

$$\begin{array}{rrll}
\text{máx} & 2x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_3 & & (\textit{Ganancia}) \\
\text{s.a:} & 2x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 \leq & 18 + t_1 & (\textit{Vidrio}) \\
 & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq & 15 + t_2 & (\textit{Madera}) \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq & 0 &
\end{array}$$

Tendrá como valor óptimo a $z^* + t_1 y_1^* + t_2 y_2^*$

Significado económico

En particular, podemos interpretar a y_1^* como el tope de lo que nos conviene pagar por una unidad de vidrio si queremos aumentar las ganancias. Análogamente, y_2^* sería el tope de los que nos conviene pagar por cada unidad de madera.

En este caso, si nos cobran la unidad de madera a un precio menor o igual que \$0,66, nos conviene comprar un poco más de madera para aumentar las ganancias.

Significado económico

En particular, podemos interpretar a y_1^* como el tope de lo que nos conviene pagar por una unidad de vidrio si queremos aumentar las ganancias. Análogamente, y_2^* sería el tope de los que nos conviene pagar por cada unidad de madera.

En este caso, si nos cobran la unidad de madera a un precio menor o igual que \$0,66, nos conviene comprar un poco más de madera para aumentar las ganancias.

Si aumentamos la cantidad de recursos, ¿x^* sigue siendo el mismo?

Análisis de Sensibilidad

Dado un problema de PL y su óptimo x^* queremos saber qué ocurre si:

- Cambian los coeficientes de la f.o.
- Cambian los términos independientes (lado derecho de la desigualdad)

¿Cuánto pueden cambiar esos parámetros para que x^* siga siendo óptimo?

Análisis de Sensibilidad - Coeficientes de la f.o.

Tenemos nuestro problema:

$$\begin{array}{rrcll} \text{máx} & 2x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_3 & & & (\textit{Ganancia}) \\ \text{s.a:} & 2x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 & \leq & 18 & (\textit{Vidrio}) \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 & \leq & 15 & (\textit{Madera}) \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 & \end{array}$$

Sabemos que el óptimo es $x^* = (7, 4, 0)$. Nos gustaría saber para qué valores de $\delta \in \mathbb{R}$ el problema con función objetivo $(2 + \delta)x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_3$ sigue teniendo a x^* como óptimo

Análisis de Sensibilidad - Coeficientes de la f.o.

Método de diccionarios: tenemos que escribir el diccionario para la solución $(7,4,0)$ Para eso, primero estandarizamos el problema:

$$\begin{array}{rrll} \text{máx} & (2+\delta)x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_3 & & (\textit{Ganancia}) \\ \text{s.a:} & 2x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 + w_1 = & 18 & (1) \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + w_2 = & 15 & (2) \\ & x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq & 0 & \end{array}$$

Como hay **dos** restricciones, hay **dos** variables básicas: x_1 y x_2. Para escribir el diccionario, debo escribir a las variables básicas en función de las no básicas.

$$\begin{array}{rlrl} \text{máx} & (2+\delta)x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_3 & & (\textit{Ganancia}) \\ \text{s.a:} & 2x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 + w_1 = & 18 & (1) \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + w_2 = & 15 & (2) \\ & x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq & 0 & \end{array}$$

$$\text{De (1): } x_2 = 18 - 2x_1 - \frac{1}{2}x_3 - w_1 \qquad (a)$$

Reemplazando esto en (2):

$$x_1 = 15 - 2x_2 - 3x_3 - w_2 = 15 - 2\left(18 - 2x_1 - \frac{1}{2}x_3 - w_1\right) - 3x_3 - w_2 =$$

$$= 7 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{2}{3}w_1 + \frac{1}{3}w_2$$

Volviendo a (a) para reemplazar a x_1:

$$x_2 = 18 - 2x_1 - \frac{1}{2}x_3 - w_1 = 18 - 2\left(7 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{2}{3}w_1 + \frac{1}{3}w_2\right) - \frac{1}{2}x_3 - w_1 =$$

$$= 4 - \frac{11}{6}x_3 + \frac{1}{3}w_1 - \frac{2}{3}w_2$$

Reemplazando a x_1, x_2 en z:

$$z = (2+\delta)x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_3 =$$

$$= (2+\delta)\left(7 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{2}{3}w_1 + \frac{1}{3}w_2\right) + 2\left(4 - \frac{11}{6}x_3 + \frac{1}{3}w_1 - \frac{2}{3}w_2\right) + \frac{3}{2}x_3 =$$

$$= 14 + 7\delta + \left(-\frac{5}{6} + \frac{2\delta}{3}\right)x_3 + \left(-\frac{2}{3} - \frac{2\delta}{3}\right)w_1 + \left(-\frac{2}{3} + \frac{\delta}{3}\right)w_2$$

Análisis de Sensibilidad- Coeficientes de la f.o.

Si queremos que x^* siga siendo óptimo, necesitamos que:

$$
\begin{gathered}
-\frac{5}{6}+\frac{2\delta}{3} \leq 0 \\
-\frac{2}{3}-\frac{2\delta}{3} \leq 0 \\
-\frac{2}{3}+\frac{\delta}{3} \leq 0
\end{gathered}
$$

Análisis de Sensibilidad- Coeficientes de la f.o.

Si queremos que x^* siga siendo óptimo, necesitamos que:

$$\begin{array}{lcl} -\frac{5}{6} + \frac{2\delta}{3} \leq 0 & \Rightarrow & \delta \leq \frac{5}{4} \\ -\frac{2}{3} - \frac{2\delta}{3} \leq 0 & \Rightarrow & \delta \geq -1 \\ -\frac{2}{3} + \frac{\delta}{3} \leq 0 & \Rightarrow & \delta \leq 2 \end{array}$$

Luego, necesitamos que $-1 \leq \delta \leq \frac{5}{4}$

Análisis de Sensibilidad - Coeficientes de la f.o.

Veamos qué sucede ahora si la función objetivo pasa a ser:

$$2x_1 + 2x_2 + \left(\frac{3}{2} + \delta\right) x_3$$

¿Para qué valores sigue siendo óptima?

Otra vez, estandarizamos el problema:

$$\begin{array}{rrll}
\text{máx} & 2x_1 + 2x_2 + \left(\frac{3}{2} + \delta\right) x_3 & & (\mathit{Ganancia}) \\
\text{s.a:} & 2x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 + w_1 = & 18 & (1) \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 + w_2 = & 15 & (2) \\
& x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq & 0 &
\end{array}$$

Con las mismas cuentas de antes, tenemos que:

$$x_1 = 7 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{2}{3}w_1 + \frac{1}{3}w_2$$

$$x_2 = 4 - \frac{11}{6}x_3 + \frac{1}{3}w_1 - \frac{2}{3}w_2$$

Escribimos z en función de las variables no básicas:

$$z = 2x_1 + 2x_2 + \left(\frac{3}{2} + \delta\right) x_3 =$$

$$= 2\left(7 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{2}{3}w_1 + \frac{1}{3}w_2\right) + 2\left(4 - \frac{11}{6}x_3 + \frac{1}{3}w_1 - \frac{2}{3}w_2\right) + \left(\frac{3}{2} + \delta\right) x_3 =$$

$$= 14 + \left(-\frac{5}{6} + \delta\right) x_3 - \frac{2}{3}w_1 - \frac{2}{3}w_2$$

Análisis de Sensibilidad- Coeficientes de la f.o.

Luego, lo único que necesitamos para que la base siga siendo óptima es que:

$$-\frac{5}{6} + \delta \leq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \delta \leq \frac{5}{6}$$

Análisis de Sensibilidad- Coeficientes de la f.o.

Luego, lo único que necesitamos para que la base siga siendo óptima es que:

$$-\frac{5}{6} + \delta \leq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \delta \leq \frac{5}{6}$$

¿Cuál fue la diferencia entre alterar el coeficiente de x_1 y de x_3? ¿Por qué?

Análisis de Sensibilidad - Coeficientes de la f.o.

Método matricial: estandarizando el problema y sabiendo que $(7,4,0)$ es solución óptima del problema, tenemos que:

$$\begin{array}{rrrc}
\text{máx} & 2x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_3 & & (\textit{Ganancia}) \\
\text{s.a:} & 2x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 + w_1 = & 18 & (1) \\
 & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + w_2 = & 15 & (2) \\
 & x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq & 0 &
\end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_B^T = (2,2) \qquad c_R^T = (\frac{3}{2}, 0, 0)$$

Análisis de Sensibilidad - Coeficientes de la f.o.

Modificando el coeficiente de una variable no básica:

$$\begin{array}{rrl} \text{máx} & 2x_1 + 2x_2 + \left(\frac{3}{2} + \delta\right) x_3 & \\ \text{s.a:} & 2x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 + w_1 = & 18 \quad (1) \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + w_2 = & 15 \quad (2) \\ & x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq & 0 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_B^T = (2, 2) \qquad c_R^T = (\frac{3}{2} + \delta, 0, 0)$$

Sólo hay que chequear para qué valores de δ el costo reducido de x_3 siga siendo negativo:

$$\bar{c}_{R_1}^T = c_{R_1}^T - c_B^T B^{-1} R_{\cdot 1} = -\frac{5}{6} + \delta$$

Luego, esta base sigue siendo óptima si $\delta \leq \frac{5}{6}$

Análisis de Sensibilidad - Coeficientes de la f.o.

Modificando el coeficiente de una variable básica:

$$
\begin{array}{rrll}
\text{máx} & (2+\delta)x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_3 & & \\
\text{s.a:} & 2x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 + w_1 = & 18 & (1) \\
 & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + w_2 = & 15 & (2) \\
 & x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq & 0 &
\end{array}
$$

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
c_B^T = (2+\delta, 2) \qquad c_R^T = (\frac{3}{2}, 0, 0)
$$

Debemos ver para qué valores de δ el vector de costos reducidos tiene todas sus componentes no positivas:

$$
\bar{c}_R^T = c_R^T - c_B^T B^{-1} R = \left(-\frac{5}{6} + \frac{2\delta}{3}, -\frac{2}{3} - \frac{2\delta}{3}, -\frac{2}{3} + \frac{\delta}{3}\right)
$$

Luego:

$$
\bar{c}_R^T \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{6} + \frac{2\delta}{3} \leq 0 \\ -\frac{2}{3} - \frac{2\delta}{3} \leq 0 \\ -\frac{2}{3} + \frac{\delta}{3} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq \delta \leq \frac{5}{4}
$$

Análisis de Sensibilidad - Términos independientes

Método de diccionarios: supongamos ahora que, sabiendo que $(7,4,0)$ es el óptimo del problema original, queremos ver cuánto puede variar uno de los recursos disponibles de manera tal que la base óptima no cambie.

$$
\begin{array}{rrll}
\text{máx} & 2x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_3 & & \\
\text{s.a:} & 2x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 + w_1 = & 18+\delta & (1) \\
 & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + w_2 = & 15 & (2) \\
 & x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq & 0 &
\end{array}
$$

Una vez más, haciendo cuentas, tenemos que:

$$
\begin{array}{rl}
x_1 = & 7 + \frac{2}{3}\delta + \frac{2}{3}x_3 - \frac{2}{3}w_1 + \frac{1}{3}w_2 \\
x_2 = & 4 - \frac{1}{3}\delta - \frac{11}{6}x_3 + \frac{1}{3}w_1 - \frac{2}{3}w_2 \\
\hline
z = & 14 + 6\delta - \frac{5}{6}x_3 - \frac{2}{3}w_1 - \frac{2}{3}w_2
\end{array}
$$

Para que la base óptima siga siendo factible, necesitamos que:

$$
\left.
\begin{array}{lllll}
x_1 \geq 0 & \Leftrightarrow & 7 + \frac{2}{3}\delta \geq 0 & \Leftrightarrow & \delta \geq -\frac{21}{2} \\
x_2 \geq 0 & \Leftrightarrow & 4 - \frac{1}{3}\delta \geq 0 & \Leftrightarrow & \delta \leq 12
\end{array}
\right. \Leftrightarrow -\frac{21}{2} \leq \delta \leq 12
$$

Análisis de Sensibilidad - Términos independientes

Método matricial: estandarizamos el problema y se tiene que:

$$\begin{array}{rrll} \text{máx} & 2x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_3 & & \\ \text{s.a:} & 2x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 + w_1 = & 18+\delta & (1) \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + w_2 = & 15 & (2) \\ & x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq & 0 & \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_B^T = (2,2) \qquad c_R^T = (\frac{3}{2}, 0, 0) \qquad b^T = (18+\delta, 15)$$

Para ver que la solución básica es factible, basta ver que $\bar{b} = B^{-1}b \geq 0$:

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18+\delta \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 + \frac{2}{3}\delta \\ 4 - \frac{1}{3}\delta \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\bar{b} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 7 + \frac{2}{3}\delta \geq 0 \\ 4 - \frac{1}{3}\delta \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta \geq -\frac{21}{2} \\ \delta \leq 12 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{21}{2} \leq \delta \leq 12$$

Análisis de Sensibilidad - Términos independientes

Obs: con los mismos procedimientos también se puede ver qué ocurre si varían todos los términos independientes al mismo tiempo:

$$
\begin{array}{rrll}
\text{máx} & 2x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_3 & & \\
\text{s.a:} & 2x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 + w_1 = & 18 + \delta_1 & (1) \\
 & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + w_2 = & 15 + \delta_2 & (2) \\
 & x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq & 0 &
\end{array}
$$