Clase 09

Problema Dual

Dualidad

Cada problema lineal tiene asociado un problema dual. Entre ellos existe una conexión que da lugar a una serie de propiedades interesantes.

El planteo del problema dual puede surgir a partir de la necesidad de encontrar cotas para el valor óptimo de nuestro problema.

Por ejemplo, si tenemos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & z = 3x_1 + 2x_2 \\ \textit{s.a:} \quad & x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ & 6x_1 - x_2 \leq 18 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Nos podría interesar hallar una cota superior para el valor óptimo z^*. La idea es manipular las restricciones para lograr una desigualdad que permita acotar z^*.

Dualidad

Idea:

Consideramos las variables $y_1, y_2, y_3 \geq 0$ tales que:

$$\begin{array}{rlcrl} (x_1 + 3x_2)y_1 \leq & 5y_1 & & x_1y_1 + 3x_2y_1 \leq & 5y_1 \\ (6x_1 - x_2)y_2 \leq & 18y_2 & \Rightarrow & 6x_1y_2 - x_2y_2 \leq & 18y_2 \\ (x_1 + 2x_2)y_3 \leq & 4y_3 & & x_1y_3 + 2x_2y_3 \leq & 4y_3 \end{array}$$

Si sumamos las tres desigualdades, tenemos que:

$$(y_1 + 6y_2 + y_3)x_1 + (3y_1 - y_2 + 2y_3)x_2 \leq 5y_1 + 18y_2 + 4y_3$$

Ahora, como nos gustaría que el lado izquierdo de la desigualdad acote a z, tenemos que pedir las siguientes condiciones:

$$y_1 + 6y_2 + y_3 \geq 3 \qquad (1)$$

$$3y_1 - y_2 + 2y_3 \geq 2 \qquad (2)$$

Es decir, si se cumplen ambas condiciones, tenemos que:

$$z = 3x_1 + 2x_2 \overset{(1) \text{ y } (2)}{\leq} (y_1 + 6y_2 + y_3)x_1 + (3y_1 - y_2 + 2y_3)x_2 \leq 5y_1 + 18y_2 + 4y_3$$

Luego, para cualesquiera $y_1, y_2, y_3 \geq 0$ que cumplan (1) y (2), podemos armarnos una cota para z

Dualidad

Naturalmente, nos interesa la mejor cota superior para z, entonces, el problema dual se plantea como:

$$\begin{array}{rrl} \text{mín} & 5y_1 + 18y_2 + 4y_3 & \\ \text{s.a:} & y_1 + 6y_2 + y_3 \geq & 3 \\ & 3y_1 - y_2 + 2y_3 \geq & 2 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq & 0 \end{array}$$

Dualidad

Naturalmente, nos interesa la mejor cota superior para z, entonces, el problema dual se plantea como:

$$\begin{array}{rrl} \text{mín} & 5y_1 + 18y_2 + 4y_3 & \\ \text{s.a:} & y_1 + 6y_2 + y_3 \geq & 3 \\ & 3y_1 - y_2 + 2y_3 \geq & 2 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq & 0 \end{array}$$

Observación 1:
\# Variables del primal = # Restricciones del dual
\# Restricciones del primal = # Variables del dual

Dualidad

En general, las formulaciones del problema primal y del problema dual se relacionan de la siguiente manera:

Primal	Dual
Obj: Minimizar	Obj: Maximizar
$\imath$-ésima restricción $\leq$	$\imath$-ésima variable ≤ 0
$\imath$-ésima restricción $\geq$	$\imath$-ésima variable ≥ 0
$\imath$-ésima restricción $=$	$\imath$-ésima variable libre
$\jmath$-ésima variable ≥ 0	$\jmath$-ésima restricción $\leq$
$\jmath$-ésima variable ≤ 0	$\jmath$-ésima restricción $\geq$
$\jmath$-ésima variable libre	$\jmath$-ésima restricción $=$

Primal	Dual
Obj: Maximizar	Obj: Minimizar
$\imath$-ésima restricción $\leq$	$\imath$-ésima variable ≥ 0
$\imath$-ésima restricción $\geq$	$\imath$-ésima variable ≤ 0
$\imath$-ésima restricción $=$	$\imath$-ésima variable libre
$\jmath$-ésima variable ≥ 0	$\jmath$-ésima restricción $\geq$
$\jmath$-ésima variable ≤ 0	$\jmath$-ésima restricción $\leq$
$\jmath$-ésima variable libre	$\jmath$-ésima restricción $=$

Ejercicio: hallar el dual asociado al siguiente problema:

$$\begin{array}{rrl}
\text{máx} & 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 & \\
\text{s.a:} & x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq & 3 \\
& x_2 + 3x_3 + 4x_4 \geq & 5 \\
& 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 - 4x_4 = & 2 \\
& x_1 \geq & 0 \\
& x_4 \leq & 0
\end{array}$$

Dualidad

$$
\begin{array}{rrl}
\text{máx} & 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 & \\
\text{s.a:} & x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq & 3 \\
 & x_2 + 3x_3 + 4x_4 \geq & 5 \\
 & 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 - 4x_4 = & 2 \\
 & x_1 \geq & 0 \\
 & x_4 \leq & 0
\end{array}
$$

Notemos que:

- El primal tiene 4 variables $\Rightarrow$ El dual tendrá 4 restricciones
- El primal tiene 3 restricciones $\Rightarrow$ El dual tendrá 3 variables

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\text{máx} & 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & & \\
\text{s.a:} & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 3 \\
 & & & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \geq & 5 \\
 & 2x_1 & - & 3x_2 & - & 7x_3 & - & 4x_4 & = & 2 \\
 & & & & & & & x_1 & \geq & 0 \\
 & & & & & & & x_4 & \leq & 0
\end{array}
$$

Restricciones:

$$\begin{array}{lccccccccc}
\text{máx} & 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & & \\
\text{s.a:} & 1x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 3 \\
 & 0x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \geq & 5 \\
 & 2x_1 & - & 3x_2 & - & 7x_3 & - & 4x_4 & = & 2 \\
 & & & & & & & x_1 & \geq & 0 \\
 & & & & & & & x_4 & \leq & 0
\end{array}$$

Restricciones:

$$1y_1 + 0y_2 + 2y_3 \geq 3$$

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcr}
\text{máx} & 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & & \\
\text{s.a:} & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 3 \\
 & & & 1x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \geq & 5 \\
 & 2x_1 & - & 3x_2 & - & 7x_3 & - & 4x_4 & = & 2 \\
 & & & & & & & x_1 & \geq & 0 \\
 & & & & & & & x_4 & \leq & 0
\end{array}
$$

Restricciones:

$$y_1 + 2y_3 \geq 3$$

$$-2y_1 + 1y_2 - 3y_3 = 2$$

$$
\begin{array}{lccccccccc}
\text{máx} & 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & & \\
\text{s.a:} & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 3 \\
 & & & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \geq & 5 \\
 & 2x_1 & - & 3x_2 & - & 7x_3 & - & 4x_4 & = & 2 \\
 & & & & & & & x_1 & \geq & 0 \\
 & & & & & & & x_4 & \leq & 0
\end{array}
$$

Restricciones:

$$y_1 + 2y_3 \geq 3$$

$$-2y_1 + y_2 - 3y_3 = 2$$

$$3y_1 + 3y_2 -7y_3 = -3$$

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
\text{máx} & 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & & \\
\text{s.a:} & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 3 \\
 & & & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \geq & 5 \\
 & 2x_1 & - & 3x_2 & - & 7x_3 & - & 4x_4 & = & 2 \\
 & & & & & & & x_1 & \geq & 0 \\
 & & & & & & & x_4 & \leq & 0
\end{array}
$$

Restricciones:

$$y_1 + 2y_3 \geq 3$$

$$-2y_1 + y_2 - 3y_3 = 2$$

$$3y_1 + 3y_2 - 7y_3 = -3$$

$$4y_1 + 4y_2 - 4y_3 \leq 4$$

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
\text{máx} & 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & & \\
\text{s.a:} & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 3 \\
 & & & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \geq & 5 \\
 & 2x_1 & - & 3x_2 & - & 7x_3 & - & 4x_4 & = & 2 \\
 & & & & & & & x_1 & \geq & 0 \\
 & & & & & & & x_4 & \leq & 0
\end{array}
$$

Restricciones:

$$y_1 + 2y_3 \geq 3$$

$$-2y_1 + y_2 - 3y_3 = 2$$

$$3y_1 + 3y_2 - 7y_3 = -3$$

$$4y_1 + 4y_2 - 4y_3 \leq 4$$

Variables:

$$y_1 \geq 0$$

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
\text{máx} & 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & & \\
\text{s.a:} & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 3 \\
 & & & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \geq & 5 \\
 & 2x_1 & - & 3x_2 & - & 7x_3 & - & 4x_4 & = & 2 \\
 & & & & & & & x_1 & \geq & 0 \\
 & & & & & & & x_4 & \leq & 0
\end{array}
$$

Restricciones:

$$y_1 + 2y_3 \geq 3$$

$$-2y_1 + y_2 - 3y_3 = 2$$

$$3y_1 + 3y_2 - 7y_3 = -3$$

$$4y_1 + 4y_2 - 4y_3 \leq 4$$

Variables:

$$y_1 \geq 0 \qquad y_2 \leq 0$$

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
\text{máx} & 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & & \\
\text{s.a:} & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 3 \\
 & & & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \geq & 5 \\
 & 2x_1 & - & 3x_2 & - & 7x_3 & - & 4x_4 & = & 2 \\
 & & & & & & & x_1 & \geq & 0 \\
 & & & & & & & x_4 & \leq & 0
\end{array}
$$

Restricciones:

$$y_1 + 2y_3 \geq 3$$

$$-2y_1 + y_2 - 3y_3 = 2$$

$$3y_1 + 3y_2 - 7y_3 = -3$$

$$4y_1 + 4y_2 - 4y_3 \leq 4$$

Variables:

$$y_1 \geq 0 \qquad y_2 \leq 0 \qquad y_3 \text{ libre}$$

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
\text{máx} & 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & & \\
\text{s.a:} & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 3 \\
 & & & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \geq & 5 \\
 & 2x_1 & - & 3x_2 & - & 7x_3 & - & 4x_4 & = & 2 \\
 & & & & & & & x_1 & \geq & 0 \\
 & & & & & & & x_4 & \leq & 0
\end{array}
$$

Restricciones:

$$y_1 + 2y_3 \geq 3$$

$$-2y_1 + y_2 - 3y_3 = 2$$

$$3y_1 + 3y_2 - 7y_3 = -3$$

$$4y_1 + 4y_2 - 4y_3 \leq 4$$

Variables:

$$y_1 \geq 0 \qquad y_2 \leq 0 \qquad y_3 \text{ libre}$$

$$
\begin{array}{lccccccccc}
\text{máx} & 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & & \\
\text{s.a:} & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 3 \\
 & & & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \geq & 5 \\
 & 2x_1 & - & 3x_2 & - & 7x_3 & - & 4x_4 & = & 2 \\
 & & & & & & & x_1 & \geq & 0 \\
 & & & & & & & x_4 & \leq & 0
\end{array}
$$

Restricciones:

$$y_1 + 2y_3 \geq 3$$

$$-2y_1 + y_2 - 3y_3 = 2$$

$$3y_1 + 3y_2 - 7y_3 = -3$$

$$4y_1 + 4y_2 - 4y_3 \leq 4$$

Variables:

$$y_1 \geq 0 \qquad y_2 \leq 0 \qquad y_3 \text{ libre}$$

Objetivo:

$$\text{mín } 3y_1 + 5y_2 + 2y_3$$

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcl}
\text{máx} & 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & & \\
\text{s.a:} & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 3 \\
 & & & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \geq & 5 \\
 & 2x_1 & - & 3x_2 & - & 7x_3 & - & 4x_4 & = & 2 \\
 & & & & & & & x_1 & \geq & 0 \\
 & & & & & & & x_4 & \leq & 0
\end{array}
$$

Restricciones:

$$y_1 + 2y_3 \geq 3$$

$$-2y_1 + y_2 - 3y_3 = 2$$

$$3y_1 + 3y_2 - 7y_3 = -3$$

$$4y_1 + 4y_2 - 4y_3 \leq 4$$

Variables:

$$y_1 \geq 0 \qquad y_2 \leq 0 \qquad y_3 \text{ libre}$$

Objetivo:

$$\text{mín} \quad 3y_1 + 5y_2 + 2y_3$$

Dualidad

Primal:

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{máx} & 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 & & \\
\text{s.a:} & x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & \leq & 3 \\
 & x_2 + 3x_3 + 4x_4 & \geq & 5 \\
 & 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 - 4x_4 & = & 2 \\
 & x_1 & \geq & 0 \\
 & x_4 & \leq & 0
\end{array}
$$

Dual:

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{mín} & 3y_1 + 5y_2 + 2y_3 & & \\
\text{s.a:} & y_1 + 2y_3 & \geq & 3 \\
 & -2y_1 + y_2 - 3y_3 & = & 2 \\
 & 3y_1 + 3y_2 - 7y_3 & = & -3 \\
 & 4y_1 + 4y_2 - 4y_3 & \leq & 4 \\
 & y_1 & \geq & 0 \\
 & y_2 & \leq & 0
\end{array}
$$

Dualidad - Teoremas importantes

Teorema débil de dualidad

Sean $(x_1, \cdots, x_n)$ solución factible del primal e $(y_1, \cdots, y_m)$ solución factible del dual, entonces:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Obs: si el objetivo del primal es minimizar, la desigualdad se invierte.

Teorema fundamental de dualidad

Si el problema primal tiene solución óptima $(x_1^*, \cdots, x_n^*)$, entonces el dual tiene solución óptima $(y_1^*, \cdots, y_m^*)$ tal que:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

```
 time | node  | left  |LP iter|LP it/n| mem |mdpt |frac |vars |cons |cols |rows |cuts |confs|strbr|  dualbound   | primalbound  |  gap
Q 0.1s|     1 |     0 |     0 |     - |  52M|   0 |   - |8001 | 240 |8001 | 240 |   0 |   0 |   0 | 1.000000e+00 | 0.000000e+00 |    Inf
  0.5s|     1 |     0 |  2384 |     - |  55M|   0 |  75 |8001 | 240 |8001 | 240 |   0 |   0 |   0 | 4.069021e-02 | 0.000000e+00 |    Inf
s 0.5s|     1 |     0 |  2384 |     - |  55M|   0 |  75 |8001 | 240 |8001 | 240 |   0 |   0 |   0 | 4.069021e-02 | 3.252234e-02 |  25.11%
  0.5s|     1 |     0 |  2384 |     - |  55M|   0 |  75 |8001 | 240 |8001 | 240 |   0 |   0 |   0 | 4.069021e-02 | 3.252234e-02 |  25.11%
  0.5s|     1 |     0 |  2384 |     - |  55M|   0 |  75 |8001 | 240 |8001 | 240 |   0 |   0 |   0 | 4.069021e-02 | 3.252234e-02 |  25.11%
  0.6s|     1 |     0 |  2413 |     - |  62M|   0 |  77 |8001 | 240 |8001 | 241 |   1 |   0 |   0 | 4.067507e-02 | 3.252234e-02 |  25.07%
s 0.6s|     1 |     0 |  2413 |     - |  62M|   0 |  77 |8001 | 240 |8001 | 241 |   1 |   0 |   0 | 4.067507e-02 | 3.252234e-02 |  25.07%
  0.7s|     1 |     0 |  2460 |     - |  63M|   0 |  78 |8001 | 240 |8001 | 242 |   2 |   0 |   0 | 4.065127e-02 | 3.252234e-02 |  24.99%
  0.7s|     1 |     0 |  2484 |     - |  64M|   0 |  79 |8001 | 240 |8001 | 243 |   3 |   0 |   0 | 4.064498e-02 | 3.252234e-02 |  24.98%
  0.8s|     1 |     0 |  2556 |     - |  66M|   0 |  82 |8001 | 240 |8001 | 244 |   4 |   0 |   0 | 4.063287e-02 | 3.252234e-02 |  24.94%
  0.9s|     1 |     0 |  2608 |     - |  66M|   0 |  85 |8001 | 240 |8001 | 245 |   5 |   0 |   0 | 4.062470e-02 | 3.252234e-02 |  24.91%
s 0.9s|     1 |     0 |  2608 |     - |  66M|   0 |  85 |8001 | 240 |8001 | 245 |   5 |   0 |   0 | 4.062470e-02 | 3.275712e-02 |  24.02%
  0.9s|     1 |     0 |  2632 |     - |  66M|   0 |  87 |8001 | 240 |8001 | 246 |   6 |   0 |   0 | 4.062204e-02 | 3.275712e-02 |  24.01%
  1.0s|     1 |     0 |  2650 |     - |  69M|   0 |  87 |8001 | 240 |8001 | 247 |   7 |   0 |   0 | 4.061984e-02 | 3.275712e-02 |  24.00%
  1.1s|     1 |     0 |  2714 |     - |  69M|   0 |  91 |8001 | 240 |8001 | 248 |   8 |   0 |   0 | 4.061194e-02 | 3.275712e-02 |  23.98%
 time | node  | left  |LP iter|LP it/n| mem |mdpt |frac |vars |cons |cols |rows |cuts |confs|strbr|  dualbound   | primalbound  |  gap
  1.1s|     1 |     0 |  2832 |     - |  71M|   0 |  93 |8001 | 240 |8001 | 249 |   9 |   0 |   0 | 4.060495e-02 | 3.275712e-02 |  23.96%
  1.2s|     1 |     0 |  2887 |     - |  71M|   0 |  91 |8001 | 240 |8001 | 250 |  10 |   0 |   0 | 4.060206e-02 | 3.275712e-02 |  23.95%
  1.3s|     1 |     0 |  3196 |     - |  71M|   0 |  90 |8001 | 240 |8001 | 251 |  11 |   0 |   0 | 4.058451e-02 | 3.275712e-02 |  23.90%
E 1.4s|     1 |     0 |  3477 |     - |  72M|   0 |  90 |8001 | 240 |8001 | 251 |  11 |   0 |   0 | 4.058451e-02 | 3.911107e-02 |   3.77%
  1.4s|     1 |     0 |  3477 |     - |  73M|   0 |  90 |8001 | 240 |8001 | 251 |  11 |   0 |   0 | 4.058451e-02 | 3.911107e-02 |   3.77%
  1.5s|     1 |     0 |  3665 |     - |  74M|   0 |  95 |8001 | 240 |8001 | 252 |  12 |   0 |   0 | 4.053279e-02 | 3.911107e-02 |   3.64%
  1.6s|     1 |     0 |  3739 |     - |  74M|   0 |  96 |8001 | 240 |8001 | 253 |  13 |   0 |   0 | 4.051408e-02 | 3.911107e-02 |   3.59%
  1.9s|     1 |     2 |  3739 |     - |  74M|   0 |  96 |8001 | 240 |8001 | 253 |  13 |   0 |  37 | 4.051290e-02 | 3.911107e-02 |   3.58%
   (1.9s) symmetry computation started: requiring (bin +, int -, cont -), (fixed: bin -, int +, cont -)
   (2.0s) no symmetry present
L13.2s|    79 |    80 | 11675 | 105.3 |  99M|  21 | 112 |8001 | 251 |8001 | 262 |  27 |  11 |1026 | 4.051179e-02 | 3.932737e-02 |   3.01%
 14.8s|   100 |   101 | 17989 | 146.8 | 100M|  21 | 112 |8001 | 251 |8001 | 263 |  27 |  11 |1089 | 4.051179e-02 | 3.932737e-02 |   3.01%
 24.7s|   200 |   201 | 39565 | 181.4 | 102M|  31 | 116 |8001 | 282 |8001 | 269 |  43 |  42 |1694 | 4.050821e-02 | 3.932737e-02 |   3.00%
C29.5s|   279 |   280 | 55473 | 187.1 | 103M|  32 | 115 |8001 | 292 |8001 | 282 |  58 |  52 |1858 | 4.050821e-02 | 3.932737e-02 |   3.00%
 31.2s|   300 |   301 | 62100 | 196.1 | 104M|  32 | 115 |8001 | 302 |8001 | 278 |  60 |  62 |1910 | 4.050821e-02 | 3.932737e-02 |   3.00%
 41.3s|   400 |   401 |121310 | 295.4 | 109M|  32 | 119 |8001 | 382 |8001 | 277 |  72 | 146 |2003 | 4.050078e-02 | 3.932737e-02 |   2.98%
 53.2s|   500 |   501 |194633 | 383.1 | 113M|  32 | 129 |8001 | 531 |8001 | 281 |  94 | 306 |2034 | 4.049421e-02 | 3.932737e-02 |   2.97%
 time | node  | left  |LP iter|LP it/n| mem |mdpt |frac |vars |cons |cols |rows |cuts |confs|strbr|  dualbound   | primalbound  |  gap
 62.8s|   600 |   601 |252925 | 416.5 | 116M|  32 | 128 |8001 | 595 |8001 | 284 | 114 | 399 |2043 | 4.049100e-02 | 3.932737e-02 |   2.96%
```

Dualidad - Teorema fundamental de dualidad

Los teoremas de dualidad nos permiten observar otra relación muy importante entre el problema primal y el problema dual:

		Dual		
		Óptimo	Infactible	No acotado
Primal	Óptimo	✓	✗	✗
	Infactible	✗	✓	✓
	No acotado	✗	✓	✗

✓: puede ocurrir ✗: no puede ocurrir

Dualidad - Teorema de Holgura Complementaria

Teorema de Holgura Complementaria

Sean $x^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$ solución óptima del primal e $y^* = (y_1^*, \cdots, y_m^*)$ solución óptima del dual, las siguientes son condiciones necesarias y suficientes para la optimalidad simultánea de x^* e y^*:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j \quad \text{o} \quad x_j^* = 0 \quad \text{(o ambos)} \quad \forall j = 1, \cdots, n$$
$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j^* = b_i \quad \text{o} \quad y_i^* = 0 \quad \text{(o ambos)} \quad \forall i = 1, \cdots, m$$

Dualidad - Teorema de Holgura Complementaria

Entre otras cosas, el Teorema de Holgura Complementaria (THC) nos permite calcular el óptimo del primal a partir del óptimo del dual (y viceversa).

Ejemplo: resolver el siguiente problema lineal:

$$\begin{array}{rrl} \text{máx} & 2x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_3 & \\ \text{s.a:} & 2x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 \leq & 18 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq & 15 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq & 0 \end{array}$$

Primal	Dual
Obj: Minimizar	Obj: Maximizar
$\imath$-ésima restricción $\leq$	$\imath$-ésima variable ≤ 0
$\imath$-ésima restricción $\geq$	$\imath$-ésima variable ≥ 0
$\imath$-ésima restricción $=$	$\imath$-ésima variable libre
$\jmath$-ésima variable ≥ 0	$\jmath$-ésima restricción $\leq$
$\jmath$-ésima variable ≤ 0	$\jmath$-ésima restricción $\geq$
$\jmath$-ésima variable libre	$\jmath$-ésima restricción $=$

Primal	Dual
Obj: Maximizar	Obj: Minimizar
$\imath$-ésima restricción $\leq$	$\imath$-ésima variable ≥ 0
$\imath$-ésima restricción $\geq$	$\imath$-ésima variable ≤ 0
$\imath$-ésima restricción $=$	$\imath$-ésima variable libre
$\jmath$-ésima variable ≥ 0	$\jmath$-ésima restricción $\geq$
$\jmath$-ésima variable ≤ 0	$\jmath$-ésima restricción $\leq$
$\jmath$-ésima variable libre	$\jmath$-ésima restricción $=$

Dualidad - Teorema de Holgura Complementaria

Entre otras cosas, el Teorema de Holgura Complementaria (THC) nos permite calcular el óptimo del primal a partir del óptimo del dual (y viceversa).

Ejemplo: resolver el siguiente problema lineal:

$$\begin{array}{rrl} \text{máx} & 2x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_3 & \\ \text{s.a:} & 2x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 \leq & 18 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq & 15 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq & 0 \end{array}$$

Aprovechamos que el dual tendrá sólo dos variables y podremos resolverlo de manera gráfica:
Pasar al dual $\rightarrow$ Resolver el dual gráficamente $\rightarrow$ Usar THC para recuperar óptimo del primal

Dualidad - Teorema de Holgura Complementaria

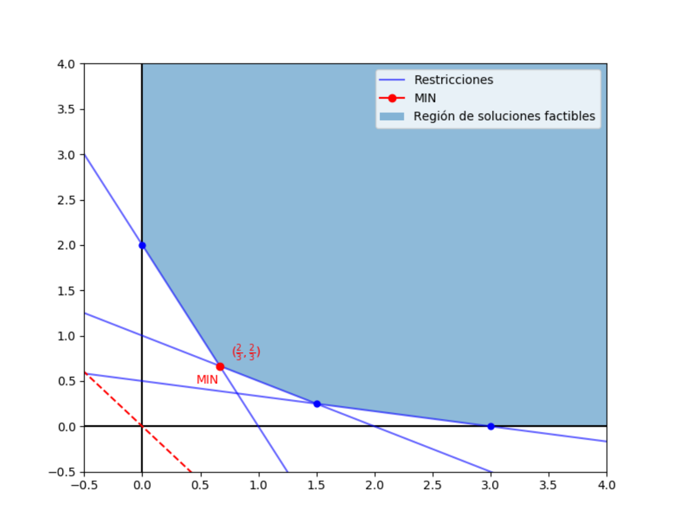
Primal:

$$\begin{aligned}
\text{máx} \quad & 2x_1 + 2x_2 + \tfrac{3}{2}x_3 \\
\text{s.a:} \quad & 2x_1 + x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 \leq 18 \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 15 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Dual:

$$\begin{aligned}
\text{mín} \quad & 18y_1 + 15y_2 \\
\text{s.a:} \quad & 2y_1 + y_2 \geq 2 \\
& y_1 + 2y_2 \geq 2 \\
& \tfrac{1}{2}y_1 + 3y_2 \geq \tfrac{3}{2} \\
& y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Dualidad - Teorema de Holgura Complementaria



$\Rightarrow$ el mínimo se alcanza en $y^* = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

Dualidad - Teorema de Holgura Complementaria

Según el THC, debe valer que:

$$
\begin{array}{llll}
x_1^* = 0 \quad o \quad 2y_1^* + y_2^* = 2 & \text{(o ambas)} & (1) \\
x_2^* = 0 \quad o \quad y_1^* + 2y_2^* = 2 & \text{(o ambas)} & (2) \\
x_3^* = 0 \quad o \quad \frac{1}{2}y_1^* + 3y_2^* = \frac{3}{2} & \text{(o ambas)} & (3) \\
y_1^* = 0 \quad o \quad 2x_1^* + x_2^* + \frac{1}{2}x_3^* = 18 & \text{(o ambas)} & (4) \\
y_2^* = 0 \quad o \quad x_1^* + 2x_2^* + 3x_3^* = 15 & \text{(o ambas)} & (5)
\end{array}
$$

Dualidad - Teorema de Holgura Complementaria

Según el THC, debe valer que:

$$\begin{array}{llll}
x_1^* = 0 \quad o \quad 2y_1^* + y_2^* = 2 & \text{(o ambas)} & (1) \\
x_2^* = 0 \quad o \quad y_1^* + 2y_2^* = 2 & \text{(o ambas)} & (2) \\
x_3^* = 0 \quad o \quad \frac{1}{2}y_1^* + 3y_2^* = \frac{3}{2} & \text{(o ambas)} & (3) \\
y_1^* = 0 \quad o \quad 2x_1^* + x_2^* + \frac{1}{2}x_3^* = 18 & \text{(o ambas)} & (4) \\
y_2^* = 0 \quad o \quad x_1^* + 2x_2^* + 3x_3^* = 15 & \text{(o ambas)} & (5)
\end{array}$$

Dualidad - Teorema de Holgura Complementaria

$$y^* = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$$

Dualidad - Teorema de Holgura Complementaria

$$y^* = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$$

$$\boxed{x_1^* = 0 \quad o \quad 2y_1^* + y_2^* = 2 \quad \text{(o ambas)}}$$

$$2y_1^* + y_2^* = 2.\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 2 \quad \checkmark$$

Dualidad - Teorema de Holgura Complementaria

$$y^* = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$$

$$x_1^* = 0 \quad o \quad 2y_1^* + y_2^* = 2 \quad \text{(o ambas)}$$

$$2y_1^* + y_2^* = 2.\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 2 \quad \checkmark$$

$$x_2^* = 0 \quad o \quad y_1^* + 2y_2^* = 2 \quad \text{(o ambas)}$$

$$y_1^* + 2y_2^* = \frac{2}{3} + 2.\frac{2}{3} = 2 \quad \checkmark$$

Dualidad - Teorema de Holgura Complementaria

$$x_3^* = 0 \quad o \quad \tfrac{1}{2}y_1^* + 3y_2^* = \tfrac{3}{2} \quad \text{(o ambas)}$$

$$\frac{1}{2}y_1^* + 3y_2^* = \frac{1}{2}.\frac{2}{3} + 3.\frac{2}{3} = \frac{7}{3} \neq \frac{3}{2} \quad ✗$$

$$\Longrightarrow x_3^* = 0$$

Dualidad - Teorema de Holgura Complementaria

$$\begin{array}{llll}
x_1^* = 0 \quad o \quad 2y_1^* + y_2^* = 2 & & \text{(o ambas)} & (1) \\
x_2^* = 0 \quad o \quad y_1^* + 2y_2^* = 2 & & \text{(o ambas)} & (2) \\
x_3^* = 0 \quad o \quad \frac{1}{2}y_1^* + 3y_2^* = \frac{3}{2} & & \text{(o ambas)} & (3) \\
y_1^* = 0 \quad o \quad 2x_1^* + x_2^* + \frac{1}{2}x_3^* = 18 & & \text{(o ambas)} & (4) \\
y_2^* = 0 \quad o \quad x_1^* + 2x_2^* + 3x_3^* = 15 & & \text{(o ambas)} & (5)
\end{array}$$

Dualidad - Teorema de Holgura Complementaria

$y_1^* = 0 \quad o \quad 2x_1^* + x_2^* + \frac{1}{2}x_3^* = 18 \quad \text{(o ambas)}$

$$y_1^* \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad 2x_1^* + x_2^* + \frac{1}{2}x_3^* = 18$$

Dualidad - Teorema de Holgura Complementaria

$$\boxed{y_1^* = 0 \quad o \quad 2x_1^* + x_2^* + \tfrac{1}{2}x_3^* = 18 \quad \text{(o ambas)}}$$

$$y_1^* \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad 2x_1^* + x_2^* + \frac{1}{2}x_3^* = 18$$

$$\boxed{y_2^* = 0 \quad o \quad x_1^* + 2x_2^* + 3x_3^* = 15 \quad \text{(o ambas)}}$$

$$y_2^* \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1^* + 2x_2^* + 3x_3^* = 15$$

Dualidad - Teorema de Holgura Complementaria

$$\begin{cases} 2x_1^* + x_2^* + \frac{1}{2}x_3^* = 18 \\ x_1^* + 2x_2^* + 3x_3^* = 15 \end{cases}$$

Dualidad - Teorema de Holgura Complementaria

$$\begin{cases} 2x_1^* + x_2^* + \frac{1}{2}x_3^* = 18 \\ x_1^* + 2x_2^* + 3x_3^* = 15 \end{cases} \overset{x_3^*=0}{\iff} \begin{cases} 2x_1^* + x_2^* = 18 \\ x_1^* + 2x_2^* = 15 \end{cases}$$

Dualidad - Teorema de Holgura Complementaria

$$\begin{cases} 2x_1^* + x_2^* + \frac{1}{2}x_3^* = 18 \\ x_1^* + 2x_2^* + 3x_3^* = 15 \end{cases} \overset{x_3^*=0}{\iff} \begin{cases} 2x_1^* + x_2^* = 18 \\ x_1^* + 2x_2^* = 15 \end{cases}$$

$$\iff x_1^* = 7 \quad \wedge \quad x_2^* = 4$$

$$x^* = (7, 4, 0)$$
$$z^* = 22$$

Dualidad

Teorema

Una solución factible $x_1^*, \cdots, x_n^*$ de

$$\begin{array}{rrll} \text{máx} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \\ \text{s.a:} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq & b_i & \forall i = 1, \cdots, m \\ & x_j \geq & 0 & \forall j = 1, \cdots, n \end{array}$$

es óptima si y sólo si existen $y_1^*, \cdots, y_m^*$ tales que:

$$\begin{array}{rcccl} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* & = & c_j & \text{cuando} & x_j^* > 0 \\ y_i^* & = & 0 & \text{cuando} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_i \end{array}$$

y tales que:

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* & \geq & c_j & \forall j = 1, \cdots, n \\ y_i^* & \geq & 0 & \forall i = 1, \cdots, m \end{array}$$

Dualidad - Teorema de Holgura Complementaria

Dada una solución factible de un problema lineal, el teorema anterior brinda una manera de chequear si es óptima.

Ejemplo: supongamos que tenemos el siguiente problema lineal:

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcrcl}
\text{máx} & 18x_1 & - & 7x_2 & + & 12x_3 & + & 5x_4 & & & + & 8x_6 & & \\
\text{s.a:} & 2x_1 & - & 6x_2 & + & 2x_3 & + & 7x_4 & + & 3x_5 & + & 8x_6 & \leq & 1 \\
 & -3x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & + & x_5 & + & 2x_6 & \leq & -2 \\
 & 8x_1 & - & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & & & + & 2x_6 & \leq & 4 \\
 & 4x_1 & & & + & 8x_3 & + & 7x_4 & - & x_5 & + & 3x_6 & \leq & 1 \\
 & 5x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 6x_4 & - & 2x_5 & - & x_6 & \leq & 5 \\
 & & & & & & & & \multicolumn{4}{r}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6} & \geq & 0
\end{array}
$$

Y queremos chequear si la siguiente solución es óptima:

$$x_1^* = 2,\ x_2^* = 4,\ x_3^* = 0,\ x_4^* = 0,\ x_5^* = 7,\ x_6^* = 0$$

Dualidad

Queremos chequear si la siguiente solución es óptima:

$$x_1^* = 2,\ x_2^* = 4,\ x_3^* = 0,\ x_4^* = 0,\ x_5^* = 7,\ x_6^* = 0$$

Basta chequear que existan $y_1^*, \cdots, y_5^*$ que cumplan las hipótesis del teorema. Como $x_1^* > 0$, $x_2^* > 0$ y $x_5^* > 0$, los y_i^* deben cumplir que:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j \quad \forall j \in \{1, 2, 5\}$$

Es decir, deben cumplir que:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2y_1^* & - & 3y_2^* & + & 8y_3^* & + & 4y_4^* & + & 5y_5^* & = & 18 \\ -6y_1^* & - & y_2^* & - & 3y_3^* & & & + & 2y_5^* & = & -7 \\ 3y_1^* & + & y_2^* & & & - & y_4^* & - & 2y_5^* & = & 0 \end{array}$$

Por otro lado:

$$-3x_1^* - x_2^* + 4x_3^* - 3x_4^* + x_5^* + 2x_6^* < -2 \Rightarrow y_2^* = 0$$

$$5x_1^* + 2x_2^* - 3x_3^* + 6x_4^* - 2x_5^* - x_6^* < 5 \Rightarrow y_5^* = 0$$

Dualidad

Juntando todas las condiciones:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2y_1^* & - & 3y_2^* & + & 8y_3^* & + & 4y_4^* & + & 5y_5^* & = & 18 \\ -6y_1^* & - & y_2^* & - & 3y_3^* & & & + & 2y_5^* & = & -7 \\ 3y_1^* & + & y_2^* & & & - & y_4^* & - & 2y_5^* & = & 0 \\ & & y_2^* & & & & & & & = & 0 \\ & & & & & & & & y_5^* & = & 0 \end{array}$$

La solución para este sistema es $(\frac{1}{3}, 0, \frac{5}{3}, 1, 0)$. Como esta solución verifica que:

$$\begin{array}{rcll} \sum_{i=1}^{5} a_{ij} y_i^* & \geq & c_j & \forall j = 1, \cdots, 6 \\ y_i^* & \geq & 0 & \forall i = 1, \cdots, 5 \end{array}$$

Entonces x^* es solución óptima.

Dualidad

Ejercicio: Chequear si la siguiente solución:

$$x_1^* = 0,\ x_2^* = 2,\ x_3^* = 0,\ x_4^* = 7,\ x_5^* = 0$$

es solución óptima del siguiente problema:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcr}
\text{máx} & 8x_1 & - & 9x_2 & + & 12x_3 & + & 4x_4 & + & 11x_5 & & \\
\text{s.a:} & 2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & \leq & 1 \\
 & x_1 & + & 7x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & \leq & 1 \\
 & 5x_1 & + & 4x_2 & - & 6x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & \leq & 22 \\
 & & & & & & & \multicolumn{3}{r}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5} & \geq & 0
\end{array}$$

x^* óptima sii existen $y_1^*, \cdots, y_m^*$ tales que:

$$\begin{array}{rcll}
\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* & = & c_j & \text{cuando} \quad x_j^* > 0 \\
y_i^* & = & 0 & \text{cuando} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_i
\end{array}$$

y tales que:

$$\begin{array}{rcll}
\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* & \geq & c_j & \forall j = 1, \cdots, n \\
y_i^* & \geq & 0 & \forall i = 1, \cdots, m
\end{array}$$

Dualidad

Dado que $x_2^* > 0$ y $x_4^* > 0$, se tiene que:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -3y_1^* & + & 7y_2^* & + & 4y_3^* & = & -9 \\ y_1^* & - & 2y_2^* & + & 2y_3^* & = & 4 \end{array}$$

Por otro lado:

$$x_1^* + 7x_2^* + 3x_3^* - 2x_4^* + x_5^* < 1 \Rightarrow y_2^* = 0$$

Entonces el sistema queda:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -3y_1^* & + & 7y_2^* & + & 4y_3^* & = & -9 \\ y_1^* & - & 2y_2^* & + & 2y_3^* & = & 4 \\ & & y_2^* & & & = & 0 \end{array}$$

La solución de este sistema es $(\frac{17}{5}, 0, \frac{3}{10})$. Hay que chequear si esta solución cumple con las restricciones del problema dual:

$$\begin{array}{rcll} \sum_{i=1}^{3} a_{ij} y_i^* & \geq & c_j & \forall j = 1, \cdots, 5 \\ y_i^* & \geq & 0 & \forall i = 1, \cdots, 3 \end{array}$$

La tercera condición del dual no es respetada:

$$4y_1^* - 6y_3^* = 11{,}8 \not\geq 12$$

Luego, x^* no es solución óptima del problema.

Dualidad

Ṕroxima clase:

- Significado económico de las variables del problema dual
- Análisis de sensibilidad