Clase 08

Método de diccionarios - Método Tableau

En el capítulo anterior...

- Resolución gráfica ✓
- Forma estándar de un PL ✓
- Método de diccionarios ✓

Infinitas soluciones óptimas

Hay PL que tienen infinitas soluciones óptimas, lo cual queda en evidencia una vez que los resolvemos con SIMPLEX. Por ejemplo, el siguiente diccionario:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
w_1 & = & 3 & + & x_2 & - & 2w_2 & + & 7x_3 \\
x_1 & = & 1 & - & 5x_2 & + & 6w_2 & - & 8x_3 \\
w_3 & = & 4 & + & 9x_2 & + & 2w_2 & - & x_3 \\
\hline
z & = & 8 & & & & & - & x_3
\end{array}
$$

Toda solución óptima debe cumplir que $x_3 = 0$ (pero no necesariamente $x_2 = 0$ o $w_2 = 0$). Para tales soluciones, el diccionario implica que:

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
w_1 & = & 3 & + & x_2 & - & 2w_2 \\
x_1 & = & 1 & - & 5x_2 & + & 6w_2 \\
w_3 & = & 4 & + & 9x_2 & + & 2w_2
\end{array}
$$

Luego, cada solución óptima se obtiene asignando valores a x_2 y w_2 tales que:

$$
\begin{array}{rrcrcr}
- & x_2 & + & 2w_2 & \leq & 3 \\
 & 5x_2 & - & 6w_2 & \leq & 1 \\
- & 9x_2 & - & 2w_2 & \leq & 4 \\
 & & & x_2, w_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Es decir, podemos asignar cualquier valor a x_2 y a w_2 siempre y cuando $w_1, x_1, w_3 \geq 0$

Problemas no acotados

Recordar que la variable que sale de la base es la variable básica cuya no-negatividad impone la cota superior más restrictiva al incremento de la variable que va a entrar en la base.

Ejemplo:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_2 & = & 5 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 3x_1 \\ x_5 & = & 7 & & & - & 3x_4 & - & 4x_1 \\ \hline z & = & 5 & + & x_3 & - & x_4 & - & x_1 \end{array}$$

La variable que va a entrar a la base es x_3, pero ninguna de las variables básicas x_2 ni x_5 imponen alguna restricción sobre cuánto puede aumentar $x_3 \Rightarrow$ el problema no está acotado: puedo aumentar x_3 tanto como yo quiera (por lo tanto, z puede aumentar tanto como yo quiera).

En general, **si no existen candidatos para dejar la base, el problema es no acotado.**

Soluciones degeneradas

Se dice que **una solución básica es degenerada si una o más de sus variables básicas valen cero**.

Ejemplo:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_3 & = & 0{,}5 & & & - & 0{,}5x_4 & & \\
x_5 & = & & - & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_4 \\
x_6 & = & & & x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_4 \\
\hline
z & = & 4 & + & 2x_1 & - & x_2 & - & 4x_4
\end{array}$$

Solución actual: $(0, 0, \mathbf{\frac{1}{2}}, 0, \mathbf{0}, \mathbf{0})$

x_1 entrará a la base, pero observemos qué ocurre en la segunda ecuación:

$$0 \leq x_5 = -2x_1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \leq 0$$

$\Rightarrow$ el crecimiento de x_1 está limitado a 0 $\Rightarrow$ ni el valor de x_1 ni el de las otras variables va a cambiar, y el valor de z sigue siendo el mismo.

Soluciones degeneradas

Aún así, debemos *pivotear* para permitir que x_1 entre a la base y que x_5 salga.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & = & & & 2x_2 & + & 1{,}5x_4 & - & 0{,}5x_5 \\
x_3 & = & 0{,}5 & & & - & 0{,}5x_4 & & \\
x_6 & = & & - & x_2 & + & 3{,}5x_4 & - & 0{,}5x_5 \\
\hline
z & = & 4 & + & 3x_2 & - & x_4 & - & x_5
\end{array}$$

Solución actual: $(\mathbf{0}, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, \mathbf{0})$

Puesto que esta iteración de SIMPLEX no produjo un cambio en el valor z, es una **iteración degenerada**.

En el ejemplo, la próxima iteración también será degenerada, pero la posterior no. Puede ocurrir una racha de iteraciones degeneradas, pero en la gran mayoría de los casos, la racha es interrumpida por una iteración no degenerada.

Soluciones degeneradas - Ciclos

Podría ocurrir que las soluciones degeneradas provoquen ciclos infinitos en el SIMPLEX. Ejemplo (Chvátal, 1983):

$$
\begin{array}{rclrrrrrrr}
x_5 & = & & - & 0{,}5x_1 & + & 5{,}5x_2 & + & 2{,}5x_3 & - & 9x_4 \\
x_6 & = & & - & 0{,}5x_1 & + & 1{,}5x_2 & + & 0{,}5x_3 & - & x_4 \\
x_7 & = & 1 & - & x_1 & + & & & & & \\
\hline
z & = & & & 10x_1 & - & 57x_2 & - & 9x_3 & - & 24x_4
\end{array}
$$

Luego de la primera iteración (x_1 entra, x_5 sale):

$$
\begin{array}{rclrrrrrrr}
x_1 & = & & & 11x_2 & + & 5x_3 & - & 18x_4 & - & 2x_5 \\
x_6 & = & & - & 4x_2 & - & 2x_3 & + & 8x_4 & + & x_5 \\
x_7 & = & 1 & - & 11x_2 & - & 5x_3 & + & 18x_4 & + & 2x_5 \\
\hline
z & = & & & 53x_2 & + & 41x_3 & - & 204x_4 & - & 20x_5
\end{array}
$$

$$\vdots$$

Soluciones degeneradas

$$\vdots$$

Luego de la quinta iteración:

$$\begin{array}{rcrrrrrrrrrr}
x_5 & = & & & 9x_6 & + & 4x_1 & - & 8x_2 & - & 2x_3 \\
x_4 & = & & - & x_6 & - & 0{,}5x_1 & + & 1{,}5x_2 & + & 0{,}5x_3 \\
x_7 & = & 1 & & & - & x_1 & & & & \\
\hline
z & = & & & 24x_6 & + & 22x_1 & - & 93x_2 & - & 21x_3
\end{array}$$

Luego de la sexta iteración:

$$\begin{array}{rcrrrrrrrrrr}
x_5 & = & & - & 0{,}5x_1 & + & 5{,}5x_2 & + & 2{,}5x_3 & - & 9x_4 \\
x_6 & = & & - & 0{,}5x_1 & + & 1{,}5x_2 & + & 0{,}5x_3 & - & x_4 \\
x_7 & = & 1 & - & x_1 & + & & & & & \\
\hline
z & = & & & 10x_1 & - & 57x_2 & - & 9x_3 & - & 24x_4
\end{array}$$

¡Volvimos al mismo diccionario del principio!

Soluciones degeneradas - Regla de Bland

Regla de Bland:

1. La variable entrante será la variable no básica **de menor índice** con coeficiente positivo en la f.o.
2. La variable que sale se elige como siempre. Si hay empates entre variables, sale la que tenga menor índice.

Se puede demostrar que, utilizando la regla de Bland, SIMPLEX no cicla.

Obs: no es necesario utilizar la regla de Bland en cada iteración. Podríamos comenzar a emplearla, por ejemplo, luego de algunas iteraciones degeneradas y descartarla cuando se produzca una iteración no degenerada.

Soluciones degeneradas - Regla de Bland

En el ejemplo donde SIMPLEX ciclaba, veamos cómo la regla de Bland nos ayuda a salir del ciclo. En la quinta iteración teníamos el siguiente diccionario:

$$
\begin{array}{rclrrrrrrrr}
x_5 & = & & & 9x_6 & + & 4x_1 & - & 8x_2 & - & 2x_3 \\
x_4 & = & & - & x_6 & - & 0{,}5x_1 & + & 1{,}5x_2 & + & 0{,}5x_3 \\
x_7 & = & 1 & & & - & x_1 & & & & \\
\hline
z & = & & & 24x_6 & + & 22x_1 & - & 93x_2 & - & 21x_3
\end{array}
$$

Vimos que si usamos el criterio usual, x_6 entra a la base y así volvemos al diccionario inicial.

En cambio, si aplicamos la Regla de Bland, x_6 no entrará a la base, sino que x_1 entrará. Cada ecuación nos impone las siguientes restricciones, respectivamente:

$$x_1 < \infty \qquad x_1 \leq 0 \qquad x_1 \leq 1$$

Luego, x_4 sale de la base. Si bien esta es una iteración degenerada, veamos cómo queda el nuevo diccionario.

Soluciones degeneradas - Regla de Bland

Una vez que pivoteamos, el nuevo diccionario queda así:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_1 & = & & - & 2x_6 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 \\
x_5 & = & & & x_6 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & - & 8x_4 \\
x_7 & = & 1 & + & 2x_6 & - & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 \\
\hline
z & = & & - & 20x_6 & - & 27x_2 & + & x_3 & - & 44x_4
\end{array}$$

Primero, no volvimos al diccionario inicial. Por otro lado, veamos qué sucede con la próxima iteración: x_3 entrará a la base y x_7 saldrá de la base. Luego de efectuar el pivote, el nuevo diccionario queda:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_3 & = & 1 & + & 2x_6 & - & 3x_2 & + & 2x_4 & - & x_7 \\
x_1 & = & 1 & & & & & & & - & x_7 \\
x_5 & = & 2 & + & 5x_6 & - & 2x_2 & - & 4x_4 & - & 2x_7 \\
\hline
z & = & 1 & - & 18x_6 & - & 30x_2 & - & 42x_4 & - & x_7
\end{array}$$

Como z cambió su valor (pasó de valer 0 a valer 1), la última iteración no es degenerada. Más aún llegamos a una solución óptima: (1,0,1,0,1,0,0)

Soluciones degeneradas - Regla de Bland

En síntesis:

- en general es útil utilizar **el criterio usual** para decidir qué variable entra a la base: "Entra a la base la variable con mayor coeficiente positivo en la f.o."
- si se viene dando una **seguidilla de iteraciones degeneradas, usar la Regla de Bland**.

Soluciones degeneradas - Perturbaciones

Introducir pequeñas perturbaciones al problema original es otro método para evitar que SIMPLEX cicle.

$$
\begin{aligned}
\text{máx} \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{s.a:} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \leq b_i \quad \forall i = 1, \ldots, m \\
& x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
\longrightarrow
\begin{aligned}
\text{máx} \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{s.a:} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \leq b_i + \varepsilon_i \quad \forall i = 1, \ldots, m \\
& x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

Tomando a los ε_i fijos tales que $0 < \varepsilon_m \ll \varepsilon_{m-1} \ll \cdots \ll \varepsilon_2 \ll \varepsilon_1 \ll 1$.

Se aplica SIMPLEX al problema perturbado y luego se recupera la solución considerando a los ε_i nulos.

Soluciones degeneradas - Perturbaciones

Volvamos al ejemplo donde SIMPLEX cicla con el criterio usual. Agregando las perturbaciones el diccionario inicial es:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
x_5 & = & \varepsilon_1 & & & - & 0{,}5x_1 & + & 5{,}5x_2 & + & 2{,}5x_3 & - & 9x_4 \\
x_6 & = & \varepsilon_2 & & & - & 0{,}5x_1 & + & 1{,}5x_2 & + & 0{,}5x_3 & - & x_4 \\
x_7 & = & 1 & + & \varepsilon_3 & - & x_1 & + & & & & & \\
\hline
z & = & & & & & 10x_1 & - & 57x_2 & - & 9x_3 & - & 24x_4
\end{array}
$$

La variable que entra a la base es x_1 y las cotas que cada ecuación impone a su crecimiento es, respectivamente:

$$x_1 \leq 2\varepsilon_1 \qquad x_1 \leq 2\varepsilon_2 \qquad x_1 \leq 1 + \varepsilon_3$$

Como $2\varepsilon_2 < 2\varepsilon_1 < 1 + \varepsilon_3$ la variable que sale de la base es x_6. Pivoteamos y el nuevo diccionario queda:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcr}
x_1 & = & 2\varepsilon_2 & & & & & + & 3x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & - & 2x_6 \\
x_5 & = & \varepsilon_1 & - & \varepsilon_2 & & & + & 4x_2 & + & 2x_3 & - & 8x_4 & + & x_6 \\
x_7 & = & 1 & - & 2\varepsilon_2 & + & \varepsilon_3 & - & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & 2x_6 \\
\hline
z & = & & & 20\varepsilon_2 & & & - & 27x_2 & + & x_3 & - & 44x_4 & - & 20x_6
\end{array}
$$

Soluciones degeneradas - Perturbaciones

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcrcr}
x_1 & = & 2\varepsilon_2 & & & & & + & 3x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & - & 2x_6 \\
x_5 & = & \varepsilon_1 & - & \varepsilon_2 & & & + & 4x_2 & + & 2x_3 & - & 8x_4 & + & x_6 \\
x_7 & = & 1 & - & 2\varepsilon_2 & + & \varepsilon_3 & - & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & 2x_6 \\
\hline
z & = & & & 20\varepsilon_2 & & & - & 27x_2 & + & x_3 & - & 44x_4 & - & 20x_6
\end{array}
$$

El único candidato para entrar a la base es x_3 y el único candidato para salir es x_7. El diccionario resultante después de pivotear es:

$$
\begin{array}{rclcrcrcrcr}
x_3 & = & 1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3 & + & 2x_6 & - & 3x_2 & + & 2x_4 & - & x_7 \\
x_1 & = & 1 + \varepsilon_3 & & & & & & & - & x_7 \\
x_5 & = & 2 + \varepsilon_1 - 5\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 & + & 5x_6 & - & 2x_2 & - & 4x_4 & - & 2x_7 \\
\hline
z & = & 1 + 18\varepsilon_2 + \varepsilon_3 & - & 18x_6 & - & 30x_2 & - & 42x_4 & - & x_7
\end{array}
$$

Que es el diccionario óptimo para el problema perturbado. Recuperamos la solución óptima para el problema original ignorando los términos con $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

Obs: los ε nunca aparecen en los coeficientes de las variables no básicas.

Encontrar solución factible inicial

La clase pasada vimos cómo funciona SIMPLEX una vez que le proporcionamos un solución básica factible inicial, la cual necesitamos para construir el diccionario inicial. Por ejemplo, con tomar las variables de decisión iguales a cero (problemas de origen factible) nos alcanzó para poder empezar a correr SIMPLEX.

Sin embargo, otras veces, encontrar una solución básica factible inicial no es trivial (ni siquiera es trivial que exista alguna solución factible).

Veremos tres formas sortear este obstáculo.

Encontrar solución factible inicial

Forma 1:

Encontrar solución factible inicial - Galerazo

A partir del problema estandarizado uno puede encontrar “a ojo” una solución básica factible. Esto generalmente sucede cuando el problema es de origen factible.

Obs.: no basta con hallar una solución factible cualquiera, sino que hay que asegurarse que la solución factible tenga la **cantidad apropiada de variables básicas**. Es decir, que la cantidad de las variables básicas sea igual a $rg(A)$ siendo A la matriz de coeficientes de las restricciones del problema.

En otras palabras, tenemos que asegurarnos de que la solución inicial sea un vértice del poliedro factible.

Encontrar solución factible inicial - Galerazo

Ejemplo clase pasada: Problema estandarizado:

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
\text{máx} & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & & & & & & & & \\
\text{s.a:} & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & w_1 & & & & & = & 5 \\
 & 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & + & w_2 & & & = & 11 \\
 & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & & & & & + & w_3 & = & 8 \\
 & & & & & & & & & & & x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

En este caso:

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad rg(A) = 3
$$

(0,0,0,5,11,8) ✓
(2.5 ,0,0,0,1, 0.5) ✓
(2,0,1,0,1,0) ✓

(0,0,4,1,3,0) ✓
(1,0,0,3,7,5) ✗ (es factible, pero no es un vértice)

Método de las dos fases y método Big-M

Hay dos otras manera (más metódicas) de chequear si un PL tiene alguna solución factible y, de ser así, hallar una solución básica factible inicial para correr el algoritmo.

Método de dos faces: se plantea un problema auxiliar que, al resolverlo (Fase I), otorga una solución básica factible. La Fase II consiste en resolver el problema original utilizando la solución hallada, como vimos la clase pasada.

Método Big-M: se plantea un problema auxiliar introduciendo variables artificiales que permiten obtener un solución factible básica para el problema auxiliar. Se resuelve y, si en el óptimo las variables auxiliares son nulas, se obtiene el óptimo del problema original.

Método de dos fases

Para utilizar este método, se estandariza el problema original de la siguiente manera:

- Objetivo de maximizar
- Los b_i deben ser no negativos
- Se suman variables slack para transformar a los $\leq$ en $=$
- Se restan variables slack para transformar los $\geq$ en $=$
- Se suman **variables artificiales** a_i para las desigualdades $\geq$ y para las igualdades
- Todas las variables deben ser no negativas

Método de dos fases

Ejemplo:

$$\begin{aligned}
\text{máx} \quad & x_1 - x_2 + x_3 \\
\text{s.a:} \quad & 2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 4 \\
& 2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq -5 \\
& -x_1 + x_2 - 2x_3 \leq -1 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Pasa a escribirse como:

$$\begin{aligned}
\text{máx} \quad & x_1 - x_2 + x_3 \\
\text{s.a:} \quad & 2x_1 - x_2 + 2x_3 + w_1 = 4 \\
& -2x_1 + 3x_2 - x_3 - w_2 + a_1 = 5 \\
& x_1 - x_2 + 2x_3 - w_3 + a_2 = 1 \\
& x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3, a_1, a_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Las **x** son las variables de decisión, las **w** las variables slack y las **a** las variables artificiales.

Método de dos fases - Fase I

La Fase I consiste en plantear y resolver el **problema auxiliar** (PA) que tiene como objetivo lograr que la suma de las variables auxiliares sea nula. En nuestro ejemplo:

$$\begin{array}{lrl} \text{máx} & -a_1 - a_2 & \\ \text{s.a:} & 2x_1 - x_2 + 2x_3 + w_1 = & 4 \\ & -2x_1 + 3x_2 - x_3 - w_2 + a_1 = & 5 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 - w_3 + a_2 = & 1 \\ & x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3, a_1, a_2 \geq & 0 \end{array}$$

Se resuelve el problema auxiliar. Para eso tomamos como variables básicas a w_1, a_1 y a_2 y se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} w_1 & = & 4 & - & 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & & & & \\ a_1 & = & 5 & + & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & w_2 & & \\ a_2 & = & 1 & - & x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & & & + & w_3 \end{array}$$

Llamamos **y** a la función objetivo del problema auxiliar y la escribimos en función de las variables no básicas, utilizando las igualdades:

$$y = -6 - x_1 + 2x_2 + x_3 - w_2 - w_3$$

Método de dos fases - Fase I

Así, nos queda planteado el diccionario inicial del problema auxiliar:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
w_1 & = & 4 & - & 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & & & & \\
a_1 & = & 5 & + & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & w_2 & & \\
a_2 & = & 1 & - & x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & & & + & w_3 \\
\hline
y & = & -6 & - & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & w_2 & - & w_3
\end{array}
$$

A continuación aplicamos el procedimiento usual para resolverlo. Observar que, para lograr que y=0, basta con que a_1 y a_2 sean no básicas. Por esa razón, **si en alguna iteración alguna variable artificial compite contra otras variables por salir de la base, priorizamos sacar a la variable auxiliar**.

Efectuando los pivotes necesarios llegamos al diccionario óptimo del problema auxiliar:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
w_1 & = & 3 & - & x_1 & & & - & w_3 & & & + & a_2 \\
x_2 & = & 2{,}2 & + & 0{,}6x_1 & + & 0{,}4w_2 & + & 0{,}2w_3 & - & 0{,}4a_1 & - & 0{,}2a_2 \\
x_3 & = & 1{,}6 & - & 0{,}2x_1 & + & 0{,}2w_2 & + & 0{,}6w_3 & - & 0{,}2a_1 & - & 0{,}6a_2 \\
\hline
y & = & & & & & & & & - & a_1 & - & a_2
\end{array}
$$

La solución óptima para el problema auxiliar es:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 2{,}2 \quad x_3 = 1{,}6 \quad w_1 = 3 \quad w_2 = 0 \quad w_3 = 0 \quad a_1 = 0 \quad a_2 = 0$$

Luego, es una solución básica factible del problema original, y podemos utilizarla para correr la Fase II

Método de dos fases- Fase II

La Fase II consiste justamente en buscar el óptimo del problema original, iniciando SIMPLEX sobre la solución básica factible hallada con la Fase I. Para confeccionar el diccionario inicial del problema original, utilizamos las igualdades del diccionario óptimo de la Fase I, **eliminando los términos correspondientes a las variables auxiliares**:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} w_1 & = & 3 & - & x_1 & & & - & w_3 \\ x_2 & = & 2{,}2 & + & 0{,}6x_1 & + & 0{,}4w_2 & + & 0{,}2w_3 \\ x_3 & = & 1{,}6 & - & 0{,}2x_1 & + & 0{,}2w_2 & + & 0{,}6w_3 \end{array}$$

Sólo queda reescribir z expresada en función de las variables no básicas (x_1, w_2, w_3):

$$\begin{aligned} z &= x_1 - x_2 + x_3 \\ &= x_1 - (2{,}2 + 0{,}6x_1 + 0{,}4w_2 + 0{,}2w_3) + (1{,}6 - 0{,}2x_1 + 0{,}2w_2 + 0{,}6w_3) \\ &= -0{,}6 + 0{,}2x_1 - 0{,}2w_2 - 0{,}4w_3 \end{aligned}$$

Método de dos fases- Fase II

Juntando las igualdades con la función objetivo expresada en términos de las variables no básicas, queda conformado el primer diccionario de la Fase II:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
w_1 & = & 3 & - & x_1 & & & - & w_3 \\
x_2 & = & 2{,}2 & + & 0{,}6x_1 & + & 0{,}4w_2 & + & 0{,}2w_3 \\
x_3 & = & 1{,}6 & - & 0{,}2x_1 & + & 0{,}2w_2 & + & 0{,}6w_3 \\
\hline
z & = & -0{,}6 & + & 0{,}2x_1 & - & 0{,}2w_2 & + & 0{,}4w_3
\end{array}
$$

Luego queda resolver el problema original a partir del diccionario inicial como lo hacemos usualmente. En el caso de este problema, el óptimo es:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 2{,}8 \quad x_3 = 3{,}4 \quad w_1 = 0 \quad w_2 = 0 \quad w_3 = 3$$

Luego, (0, 2.8 , 3.4) es el óptimo del problema planteado al principio.

Método de dos fases - Resumen

1. Escribir el problema original estandarizado según los lineamientos de la diapo 20
2. Plantear el problema auxiliar que tiene las mismas restricciones que el original estandarizado pero su objetivo es max $-\sum a_i$.
3. Hallar el óptimo del problema auxiliar.
4. **if** en el óptimo del problema auxiliar las variables artificiales son todas nulas:
   - Pasar a Fase II (elaborar el diccionario inicial con las igualdades del diccionario óptimo de Fase I ignorando los términos de las variables artificiales). Hallar el óptimo.

   else:
   - El problema original no tiene soluciones factibles. No hay nada más que hacer.

Método Big-M

El **método Big-M** (o método M) en el fondo es similar al método de dos fases de SIMPLEX, salvo que, de existir soluciones factibles, resuelve el problema directamente, sin necesidad de plantear problemas auxiliares.

Método Big-M

Para utilizar este método, a partir del problema original, se plantea un nuevo problema de la siguiente manera:

- Objetivo de maximizar
- Los b_i deben ser no negativos
- Se suman variables slack para transformar a los $\leq$ en $=$
- Se restan variables slack para transformar los $\geq$ en $=$
- Se suman **variables artificiales** a_i para las desigualdades $\geq$ y para las igualdades
- Todas las variables deben ser no negativas
- Se resta a la función objetivo la suma de las variables a_i multiplicadas por M (constante grande)

Método Big-M - Ejemplo

Problema original:

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & 4x_1 + x_2 \\
\text{s.a:} \quad & 3x_1 + x_2 = \quad 3 \\
& 4x_1 + 3x_2 \geq \quad 6 \\
& x_1 + 2x_2 \leq \quad 3 \\
& x_1, x_2 \geq \quad 0
\end{aligned}
$$

Planteamos el problema auxiliar:

$$
\begin{aligned}
\text{máx} \quad & -4x_1 - x_2 - Ma_1 - Ma_2 \\
\text{s.a:} \quad & 3x_1 + x_2 + \mathbf{a_1} = \quad 3 \\
& 4x_1 + 3x_2 - \mathbf{w_1} + \mathbf{a_2} = \quad 6 \\
& x_1 + 2x_2 + \mathbf{w_2} = \quad 3 \\
& x_1, x_1, w_1, w_2, a_1, a_2 \geq \quad 0
\end{aligned}
$$

Y resolvemos el problema auxiliar.
Si en el óptimo del problema auxiliar $a_1 = a_2 = 0$, entonces hallamos el óptimo del problema original. De lo contrario, el problema original no tiene solución factible.

Método Big-M

La gracia de agregar las variables artificiales es que me sirven para tomarlas como variables básicas. De esta manera, confeccionar el diccionario inicial es sencillo. De las tres restricciones tenemos que:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} a_1 & = & 3 & - & 3x_1 & - & x_2 & & \\ a_2 & = & 6 & - & 4x_1 & - & 3x_2 & + & w_1 \\ w_2 & = & 3 & - & x_1 & - & 2x_2 & & \end{array}$$

Reescribiendo z en función de las variables no básicas:

$$z = 9M + (7M - 3)x_1 + (4M - 1)x_2 - Mw_1$$

El diccionario inicial es entonces:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} a_1 & = & 3 & - & 3x_1 & - & x_2 & & \\ a_2 & = & 6 & - & 4x_1 & - & 3x_2 & + & w_1 \\ w_2 & = & 3 & - & x_1 & - & 2x_2 & & \\ z & = & 9M & + & (7M-3)x_1 & + & (4M-1)x_2 & - & Mw_1 \end{array}$$

Método Big-M

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
a_1 & = & 3 & - & 3x_1 & - & x_2 & & \\
a_2 & = & 6 & - & 4x_1 & - & 3x_2 & + & w_1 \\
w_2 & = & 3 & - & x_1 & - & 2x_2 & & \\
\hline
z & = & 9M & + & (7M-3)x_1 & + & (4M-1)x_2 & - & Mw_1
\end{array}
$$

La variable que entra es x_1 y sale a_1. Pivotear da lugar al siguiente diccionario:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & = & 1 & - & \frac{1}{3}x_2 & & & - & \frac{1}{3}a_1 \\
a_2 & = & 2 & - & \frac{5}{3}x_2 & + & w_1 & + & \frac{4}{3}a_1 \\
w_2 & = & 2 & - & \frac{5}{3}x_2 & & & + & \frac{1}{3}a_1 \\
\hline
z & = & 2M+4 & + & \frac{(5M+1)}{3}x_2 & - & Mw_1 & - & \frac{(7M-4)}{3}a_1
\end{array}
$$

En la próxima iteración x_2 va a entrar a la base y a_2 y w_2 compiten para salir de la base. Como queremos que a_2 sea no básica, la elegimos para que salga de la base. Así continuamos resolviendo hasta hallar el óptimo del problema auxiliar.

Método Big-M

En este ejemplo, el óptimo del problema auxiliar es:

$$x_1 = \frac{3}{5} \quad x_2 = \frac{6}{5} \quad w_1 = 0 \quad w_2 = 0 \quad a_1 = 0 \quad a_2 = 0$$

Como las variables auxiliares son todas nulas en el óptimo del problema auxiliar, el problema original tiene soluciones factibles. Más aún, el óptimo del problema original es $\left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right)$

Método Big-M

Método Big-M:

1. Plantear el problema auxiliar como se indica en la diapo 28
2. Confeccionar el diccionario inicial tomando como variables básicas a las variables artificiales (de las restricciones $\geq$ e $=$) y a las variables slack (de las restricciones $\leq$)
3. Hallar el óptimo del problema auxiliar:
   - *if* en el óptimo del problema auxiliar las variables artificiales son no básicas:

     Del óptimo del problema auxiliar se deduce el óptimo del problema original
   - *else*:

     el problema original es infactible

Conclusiones

Siempre necesitamos una solución básica factible inicial (SBFI) para poder correr SIMPLEX:

- En ciertos problemas, la SFBI se puede encontrar a ojo.
- Si encontrar una SFBI a ojo es difícil (o si ni siquiera estamos seguros que el problema tenga alguna solución factible), recurrimos al método de dos fases o al método Big-M.