Investigación Operativa

Segundo cuatrimestre - 2017

Práctica 4

Introducción a grafos

---

1. Determine el mayor número de vértices que puede tener un grafo con 50 aristas. ¿Cuál es el máximo número de vértices si todos tienen grado al menos 3?

2. Sea $G = (V, E)$ un digrafo (grafo dirigido). Se definen para $v \in V$ $d_{in}(v)$ y $d_{out}(v)$ como el número de aristas que salen (respectivamente llegan) de v. Pruebe que
$$\sum_{v \in V} d_{in}(v) = \sum_{v \in V} d_{out}(v).$$

3. La secuencia $D = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ se dice gráfica si hay un grafo (simple) con secuencia de grados D.
   - *a*) Muestre que $(7, 6, 5, 4, 3, 3, 2)$ y $(6, 6, 5, 4, 3, 3, 1)$ no son secuencias gráficas.
   - *b*) Si D es una secuencia gráfica tal que $d_1 \le d_2 \le \cdots \le d_n$ entonces la suma $\sum_{i=1}^{n} d_i$ es par y $\sum_{i=1}^{k} d_i \le k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(k, d_i)$ para $1 \le k \le n$.
   - †*c*) Probar que vale la reciproca del ítem anterior, es decir, si se tiene una secuencia D que verifica esas condiciones entonces es una secuencia gráfica.

4. Un grafo G se dice autocomplementario si es isomorfo a su complemento $\overline{G}$. Encuentre todos los grafos autocomplementarios con a lo sumo 5 vértices. Muestre que si un grafo autocomplementario tiene n vértices, entonces es $n \equiv 0$ o 1 (4).

5. - *a*) Dibuje todos los grafos conexos de 4 vértices (salvo isomorfismo).
   - *b*) Dibuje todos los grafos conexos de 5 vértices (salvo isomorfismo). **Nota:** Son 21.

6. Sean G un grafo y A su matriz de adyacencia. Pruebe que $A^n_{i,j}$ coincide con la cantidad de caminos (no necesariamente simples) de largo n que unen el vértice i con el vértice j.

7. - *a*) Caracterice la matriz de adyacencia de un grafo bipartito.
   - *b*) Pruebe que un grafo es bipartito si y sólo si para todo n impar los elementos de la diagonal de A^n son nulos, donde A es la matriz de adyacencia del grafo.

8. Pruebe que un grafo $G = (V, E)$ es conexo si y sólo si para toda partición de V en dos subconjuntos V_1 y V_2 hay una arista de G que une un punto de V_1 con uno de V_2.

9. Pruebe que un grafo de n vértices que tiene más de $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ aristas es conexo.

10. Sea G un grafo pesado y T un árbol generador mínimo. Supongamos que e es la arista de mayor peso de un ciclo C de G. ¿Es cierto que necesariamente $e \notin T$?

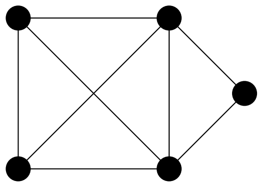
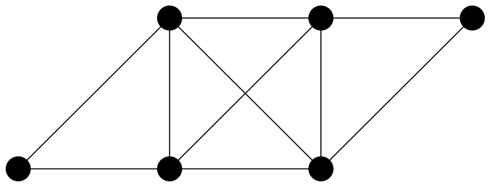
11. Sea G un grafo pesado y supongamos que los pesos son todos distintos. Pruebe que G tiene un único árbol generador mínimo.

12. Pruebe que en todo grafo conexo con más de un vértice hay al menos dos vértices que no son de corte (es decir, que al removerlos el grafo sigue siendo conexo).

13. Se cuenta con N cubos de madera de distintos tamaños. Cada cara de los cubos está coloreada. Modele el problema de construir la torre de cubos más alta posible si no se puede apilar un cubo sobre otro más chico y además los colores de dos caras superpuestas tienen que coincidir.

14. En la ciudad de X. hay N esquinas y M calles. Conociendo el mapa de la ciudad, se busca decidir si es posible colocar policías en algunas de las esquinas de manera que cada calle sea custodiada por exactamente un policía (un policía custodia las calles que desembocan en la esquina en que se encuentra).

15. Considere los siguientes dibujos:

¿Es posible reproducirlos sin levantar el lápiz? Exprese el problema en términos de teoría de grafos.

16. La red de transportes de la provincia de X. deja mucho que desear. Concretamente, la provincia tiene N ciudades conectadas por M líneas de autobuses. El autobús de la i-ésima línea tiene una capacidad determinada C_i de pasajeros. Un tour por la provincia es una secuencia válida de viajes en autobús que empieza en la ciudad 1 y termina en la ciudad N. Si queremos llevar a un grupo de P personas a conocer todas las ciudades de la provincia, ¿cuál es el mínimo número de tours que hay que realizar?

17. Supongamos que se tienen cuatro aulas y las siguientes materias con sus respectivos horarios para un mismo día:

Álgebra I	8 a 12 hs.
Análisis I	10 a 14 hs.
Análisis II	14 a 18 hs.
Lineal	11 a 15 hs.
Avanzado	12 a 16 hs.
Complejo	9 a 13 hs.
Operativa	14 a 18 hs.
Estadística	14 a 18 hs.

Decida si existe una forma de asignar aulas de forma que se puedan dictar todas las materias respetando los horarios. Modele como un problema de grafos.

18. Sea $\mathcal{R}$ una relación en $\{1, \ldots, n\}$. Modele el problema de calcular $\overline{\mathcal{R}}$, la clausura transitiva de $\mathcal{R}$.

19. Considere la siguiente tabla con el tipo de cambio de algunas monedas:

Tasa de cambio	Peso argentino	Dólar	Peso chileno	Peso colombiano
Peso argentino	1	0,0660	43,8072	192,758
Dólar	15,1495	1	648,824	2920,22
Peso chileno	0,0228	0,00154	1	4,46547
Peso colombiano	0,00519	0,00034	0,22393	1

Modele el problema de cambiar de forma óptima 1000 pesos argentinos a dólares en términos de grafos. ¿Es posible hacer una sucesión de cambios de forma que se termine con más de 1000 pesos argentinos?