Investigación Operativa

Segundo cuatrimestre - 2017

Práctica 3

Programación Lineal - Dualidad

---

1. Pruebe que el problema dual del problema dual es el problema primal.
2. Encuentre un problema no factible cuyo dual tampoco sea factible.
3. Dado el siguiente problema

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 8x_5 + 2x_6 + x_7 \\ \text{s.a. } & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 32x_4 + 3x_5 + 20x_6 + 11x_7 \geq 1 \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

   a) Encuentre el valor óptimo de la función objetivo.

   b) Encuentre el punto en que se alcanza.

4. Considere el siguiente problema de programación lineal.

$$\begin{aligned} \max z &= c_1x_1 + c_2x_2 \\ \text{s.a. } & 2x_1 + 3x_2 \leq b_1 \\ & x_1 - x_2 \leq b_2 \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

   Suponga $c_1 = 1$, $c_2 = 3$, $b_1 = 6$ y $b_2 = 2$.

   a) Aplique el algoritmo Simplex para encontrar el óptimo. Justifique todos los pasos que realiza.

   b) ¿En qué intervalo puede moverse c_1 para que el punto óptimo siga siendo el mismo? Justifique.

   c) ¿En qué intervalo puede moverse b_1 para que la base óptima siga siendo la misma? Justifique.

   d) Formule el problema dual del problema original.

   e) Encuentre el óptimo del dual usando el Teorema de Holgura Complementaria.

   f) Suponga que b_1 aumenta de 6 a $6,5$. ¿En cuánto mejora la función objetivo? Justifique sin realizar ningún calculo adicional.

   g) Suponga que b_2 aumenta de 2 a 3. ¿En cuánto mejora la función objetivo? Justifique sin realizar ningún calculo adicional.

5. Para cada $\theta \in \mathbb{R}$ considere el problema

$$\begin{aligned} \max_z &= (10 - 4\theta)x_1 + (4 - \theta)x_2 + (7 + \theta)x_3 \\ \text{s.a. } & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 7 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

   Sean x_4 y x_5 las variables de holgura para las restricciones respectivas.

a) Aplique el algoritmo Simplex para encontrar el óptimo si $\theta = 0$.

b) Determine el intervalo de valores de θ para que la solución básica factible anterior siga siendo óptima.

c) Suponiendo que θ pertenece al intervalo encontrado en el item anterior encuentre el intervalo de b_1 para que la base factible óptima anterior siga siendo la misma. Repita para b_2.

d) Analice el caso en que se mueven b_1 y b_2 a la vez.

e) Formule el problema dual del problema original.

f) Suponiendo que θ pertenece al intervalo encontrado anteriormente, encuentre el óptimo del problema dual usando el teorema de Holgura Complementaria.

6. Resuelva usando Branch and Bound los siguientes problemas.

a)

$$\begin{aligned} &\max_z = 2x_1 + x_2 \\ &\text{s.a. } 2x_1 + 3x_2 \leq 19 \\ &\quad\;\; 7x_1 + 3x_2 \leq 43 \\ &\quad\;\; x \geq 0 \\ &\quad\;\; x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} &\max_z = 10x_1 + 15x_2 \\ &\text{s.a. } 8x_1 + 4x_2 \leq 40 \\ &\quad\;\; 15x_1 + 30x_2 \leq 20 \\ &\quad\;\; x \geq 0 \\ &\quad\;\; x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Nota: Puede encontrar los óptimos de los problemas lineales de forma gráfica (o como le resulte más fácil).

7. Para los ejemplos del ejercicio anterior, supongamos que por restricciones de tiempo, no podemos expandir el árbol más allá del segundo nivel. Elija la mejor solución al problema en ese caso y dé una medida de la calidad de la solución encontrada.