

A) Intervalos de confianza para una muestra.

1. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una población con distribución $N(\mu, \sigma_0^2)$ (σ_0^2 conocido). Supóngase que se pide un intervalo de confianza para μ de nivel $1 - \alpha$. Mostrar que al elegir $A = z_{\frac{\alpha}{2}}$ y $B = -z_{\frac{\alpha}{2}}$ se obtiene el intervalo de longitud mínima entre los contruidos considerando $A = z_\beta$ y $A = z_\delta$, con $\beta + \delta = \alpha$
2. Se trata de medir el período de un péndulo y se tiene un cronómetro de precisión conocida (es decir, se conoce la varianza del error). Se supone que las observaciones son de la forma $Y_i = \mu + \varepsilon_i$, donde los ε_i tienen distribución $N(0, 1/4)$ y son independientes. Los datos obtenidos son:

5.1 5.2 5.6 5.1 5.5 5.8 5.9 4.9 5.2 5.6

- (a) Encontrar un intervalo de confianza para μ de nivel 0.95.
 - (b) ¿Cuál debería haber sido el tamaño de la muestra si se hubiera deseado que la longitud del intervalo fuese a lo sumo 0.10?
3. La distribución del índice de colesterol en cierta población es $N(\mu, \sigma^2)$. Se hacen análisis a 25 personas elegidas al azar entre esta población y se obtienen los siguientes valores:

1.52 1.65 1.72 1.65 1.72 1.83 1.62 1.75 1.72 1.68 1.51 1.65 1.58
1.65 1.61 1.70 1.60 1.73 1.61 1.52 1.81 1.72 1.50 1.82 1.65

- (a) Encontrar un intervalo de confianza para μ de nivel 0.95.
 - (b) ¿Cuántos datos adicionales deben obtenerse para poder construir un intervalo de confianza para μ de nivel 0.95 pero con una longitud no mayor que 0.05? ¿Qué forma tendría este intervalo?
 - (c) Encontrar un intervalo de confianza para σ de nivel 0.90.
 - (d) Encontrar un intervalo de confianza para $\exp(-\mu)$ de nivel 0.95.
4. Un emisor transmite una seal de valor μ . El canal de comunicación corrompe la transmisión con un ruido aleatorio con distribución $N \sim N(0, \sigma^2)$, donde $\sigma^2 = 1/100$. El receptor recibe una seal de valor $X = \mu + N$. Para que el receptor pueda decodificar la seal con cierta precisión el emisor repite la transmisión n veces. El receptor decodifica la señal promediando los valores recibidos. Hallar el mínimo valor de n tal que, con un nivel de confianza de 0.99, el receptor pueda decodificar la señal con un error ≤ 0.01 .
 5. (a) Probar que si X tiene distribución $\varepsilon(\lambda)$, entonces $Y = 2\lambda X$ tiene distribución χ_{2}^2 .
(b) Sean X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una población con distribución $\varepsilon(\lambda)$. Mostrar que $T = 2\lambda \sum_{i=1}^n X_i$ tiene distribución χ_{2n}^2 .
(c) En base a b) hallar un intervalo de confianza para λ de nivel $1 - \alpha$.
(d) Se sabe que el tiempo de duración de cierto tipo de lámparas tiene distribución $\varepsilon(\lambda)$. Se han probado 20 lámparas y los tiempos de duración de los mismos en días fueron los siguientes

25 45 50 61 39 40 45 47 38 39
54 60 39 46 39 50 42 50 62 50

Hallar un intervalo de confianza para λ de nivel 0.99.

6. Clientes arriban a un banco de acuerdo con proceso de Poisson de intensidad λ por minuto. El banco abre sus puertas a las 10:00; los primeros clientes arribaron a las 10:01, 10:03, 10:11, 10:12, 10:13, 10:16. En base a estos datos construir una cota inferior de confianza de nivel 0.9 para la intensidad λ .
7. Sean X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria con distribución $U[0, \theta]$ y sea $T = \max(X_1, \dots, X_n)$.
- (a) Mostrar que T/θ tiene distribución independiente de θ .
 - (b) Usando a) hallar un intervalo de confianza de longitud mínima para θ de nivel $1 - \alpha$.

B) Intervalos de confianza para dos muestras.

8. Se desea comparar los rendimientos de dos variedades de trigo A y B. Se han cultivado 15 parcelas elegidas al azar con la variedad A y 20 con la variedad B, obteniéndose los siguientes rendimientos por hectárea:

Var. A:	250	252	245	258	240	247	251	249	250	243	247	260	238	241	239
Var. B:	330	335	327	329	320	332	337	328	334	326	331	332	328	329	337
	341	336	338	325	321										

Se supone que los rendimientos de la variedad A tienen distribución $N(\mu_1, \sigma^2)$ y los de la otra variedad $N(\mu_2, \sigma^2)$, independientes entre sí.

- Hallar un intervalo de confianza para $\mu_1 - \mu_2$ de nivel 0.99.
 - ¿Qué le sugeriría el hecho de que el 0 no pertenezca al intervalo hallado? ¿Qué pensaría en caso contrario?
 - Hallar un intervalo de confianza para σ^2 de nivel 0.99.
 - Hallar un intervalo de confianza para σ de nivel 0.90.
9. Sea X_1, \dots, X_{n_1} una m.a. de una distribución $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y sea Y_1, \dots, Y_{n_2} una m.a. de una distribución $N(\mu_2, \sigma_2^2)$; las muestras son independientes entre sí. Llamemos s_1^2 y s_2^2 a las varianzas muestrales respectivas.

- Probar que

$$\frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{n_1-1, n_2-1}.$$

- Deducir un intervalo de confianza para σ_1^2/σ_2^2 de nivel $1 - \alpha$.
 - ¿Que podría deducir si 1 no pertenece a este intervalo? ¿Y en caso contrario?
10. Se tienen dos variedades de trigo A y B. Se eligen al azar 15 parcelas, y cada una de ellas se divide en dos partes iguales. En una parte se cultiva la variedad A y en la otra la B. Se obtienen así 15 pares de datos:

Parcela:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Var. A:	41	37	36	39	44	42	38	37	35	32	39	30	40	41	37
Var. B:	39	35.3	33.5	36	42.5	38	36	34.8	33.2	29	29	36.6	28.4	38.5	39

Sea X_i el rendimiento de la variedad A en la parcela i e Y_i el rendimiento de la variedad B en la misma parcela. Se supone que (X_i, Y_i) , $1 \leq i \leq 15$, es una muestra de una distribución normal bivariada con parámetros desconocidos. Hallar un intervalo de confianza para $\mu_X - \mu_Y$ de nivel 0.95.

C) Intervalos de confianza con nivel asintótico.

- Dada una muestra aleatoria de una distribución $Bi(1, p)$, construir un intervalo de confianza de nivel asintótico $1 - \alpha$.
 - Una droga cura cierta enfermedad con probabilidad p . En una prueba con 100 enfermos, se curaron 30.

- i. Hallar un intervalo de confianza para p de nivel asintótico 0.95.
- ii. ¿Qué tamaño de muestra debería tomarse si se desea una longitud menor que 0.1?
12. El 50% de los bits emitidos por un canal de comunicación binario son 1. El receptor indica que hay un 1 cuando efectivamente se ha enviado un 1 con probabilidad p e indica que hay un 0 cuando efectivamente se ha enviado un 0 con probabilidad $6/10$. Cuántos bits deberán emitirse para que sea posible construir un intervalo de confianza de nivel asintótico 0.95 para p cuya longitud sea menor que 0.01.
13. (a) Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución $\mathcal{P}(\lambda)$. Hallar un intervalo de confianza para λ de nivel asintótico $1 - \alpha$.
- (b) El número de llamadas diarias a una central telefónica sigue un proceso de Poisson con media λ . Se ha registrado el número de llamadas durante 20 días, obteniéndose los siguientes valores:

35 41 38 40 34 36 41 48 42 46
39 37 41 35 37 38 42 43 44 67

Hallar un intervalos de confianza para λ de nivel asintótico 0.90.

14. Una sustancia radiactiva emite partículas alfa de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad λ por segundo.
- (a) Se la observó durante 10 segundos y se registraron 4 emisiones. En base a esta información muestral construir un intervalo de confianza de nivel asintótico 0.95 para λ .
- (b) Se volvió a observar la misma sustancia radiactiva hasta que emitió la cuarta partícula alfa, lo que sucedió a los 10 segundos. En base a esta información muestral construir un intervalo de confianza de nivel asintótico 0.95 para λ .
15. (a) Supóngase que X_1, \dots, X_{n_1} es una m.a. de una distribución $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y que Y_1, \dots, Y_{n_2} es una m.a. de una distribución $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, independiente de la anterior. Mostrar que

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, 1)$$

cuando $n_1 \rightarrow \infty$ y $n_2 \rightarrow \infty$ de modo que $n_1/n_2 \rightarrow \lambda$ constante.

- (b) Hallar un intervalo de confianza de nivel asintótico $(1 - \alpha)$ para $\mu_1 - \mu_2$.

D) Ejercicios para hacer en la computadora.

1. Realizar el siguiente estudio de simulación. Generar una muestra aleatoria de variables $X_i \sim Bi(n, p)$ con $(1 \leq i \leq k)$. Para cada variable aleatoria X_i construir los tres intervalos de confianza para p de nivel (asintótico o exacto según corresponda) 0.95 vistos en clase. De este modo se consiguen k intervalos de confianza, construídos a través del método 1, k a través del método 2 y k a través del método 3.

- Método 1: de nivel asintótico cuando se sustituye el valor de p en la varianza por \bar{X} .

- Método 2: de nivel asintótico cuando no se sustituye a p y se calcula los extremos del intervalo como raíces de una cuadrática.
- Método 3: de nivel exacto.

Tomar $k = 2000$ y los siguientes valores de n y p .

- $n = 20; 50; 100$.
- $p = 0.10; 0.50$.

Para cada muestra X_i guardar los siguientes resultados : el intervalo de confianza obtenido, la longitud de dicho intervalo, un 1 si el IC hallado contiene al verdadero valor de p y un 0 en caso contrario.

Para cada combinación de n y p :

- Estimar la longitud esperada para ambos métodos.
- Estimar la probabilidad de cobertura para ambos métodos.
- Sacar conclusiones.