Estimación puntual

A) Estimadores basados en los momentos.

1. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución

   - $Bi\,(1, \theta)$, $0 < \theta < 1$.
   - $\mathcal{P}\,(\theta)$, $\theta > 0$.
   - $\mathcal{E}\,(\theta)$, $\theta > 0$.
   - $\mathcal{G}\,(\theta)$, $0 < \theta < 1$.

   En cada uno de estos casos, encontrar:

   (a) Un estimador de θ basado únicamente en el primer momento.

   (b) Un estimador de θ basado únicamente en el segundo momento.

   Verificar que los respectivos estimadores cumplan las restricciones impuestas sobre el parámetro.

2. El número de partículas que emite una fuente radiactiva por segundo, constituye un proceso de Poisson de intensidad λ.
   Se recogieron durante 15 minutos los siguientes valores de emisiones:

   $$500 - 488 - 426 - 510 - 450 - 368 - 508 - 514 - 426$$
   $$476 - 512 - 526 - 444 - 524 - 236$$

   Estimar el valor del parámetro λ basado en la muestra.

3. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución $\mathcal{E}\,(\theta)$.

   (a) Hallar un estimador de los momentos de $q\,(\theta) = P_\theta\,(X_1 \geq 1)$ basado en la función $g(x) = I_{(1,+\infty)}(x)$.

   (b) Deducir de (a) un estimador para θ.

   (c) Generar una muestra de tamaño 1000 de una distribución $\mathcal{E}(3)$ y comparar la estimación obtenida con el método del item (b) con la obtenida usando el método del ejercicio 1 (a). Repetir para diferentes tamaos de muestra.

4. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución $N\,(0, \sigma^2)$, con $\sigma > 0$.

   (a) Encontrar un estimador de σ basado en el segundo momento.

   (b) Encontrar otro estimador de σ a partir de $E_\sigma\,(|X_1|)$.

5. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas Hallar el estimador de los momentos de μ si

   (a) la densidad de X_1 está dada por:

   $$f\,(x) = \frac{1}{\mu^4} x I_{[0,\mu^2]}\,(x) + \frac{1}{\mu^4}(2\mu^2 - x) I_{[\mu^2, 2\mu^2]}\,(x) \qquad \mu > 0$$

(b) la función de probabilidad de X_1 está dada por:

k	1	2	4
$p(k)$	μ^2	$2\mu(1-\mu)$	$(1-\mu)^2$

$0 < \mu < 1$

B) Estimadores de máxima verosimilitud.

1. Dada una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ para cada una de las distribuciones consideradas en el ejercicio A.1, encontrar los respectivos estimadores de máxima verosimilitud (EMV) de θ.

2. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Consideremos el parámetro bivariado $\theta = (\mu, \boldsymbol{\sigma^2})$.

   (a) Encontrar el EMV de θ.

   (b) Dado $\xi \in I\!R$, encontrar el EMV de $p = P_\theta(X_1 > \xi)$.

   (c) Dado $p \in (0,1)$, encontrar el EMV del valor ξ tal que $P_\theta(X_1 > \xi) = p$.

   (d) Hallar el EMV de μ cuando σ^2 es conocido. ¿Es razonable que no dependa de σ^2?

   (e) Hallar el EMV de σ^2 cuando μ es conocido. ¿Es razonable que dependa de μ?

   (f) Se supone que la distribución de un índice de colesterol en cierta población es $N(\mu, \sigma^2)$, donde μ y σ^2 son parámetros desconocidos. Se hacen análisis a 25 personas elegidas al azar de la población y se obtienen los siguientes datos:

1.53	1.65	1.72	1.83	1.62	1.75	1.72	1.68	1.65	1.61
1.70	1.60	1.73	1.61	1.52	1.81	1.72	1.50	1.51	1.65
1.58	1.82	1.65	1.72	1.65					

   i) Estimar μ y σ^2 por máxima verosimilitud basados en la muestra dada.

   ii) Se considera que el índice es normal si es menor que 1.73. Estimar la proporción de la población con un índice anormal.

3. Si $X_1, \ldots, X_n$ es una m.a. de una distribución $U[0, \theta]$

   (a) Hallar el EMV de θ.

   (b) Hallar el estimador de los momentos de θ.

4. Si $X_1, \ldots, X_n$ es una m.a. de una distribución, cuya densidad es

$$f(x) = \frac{2x}{\theta^2}\, I_{[0,\theta)}(x)$$

   (a) Hallar el EMV de θ.

   (b) Hallar el estimador de los momentos de θ.

5. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución exponencial desplazada, cuya densidad es

$$f(x) = e^{-(x-\theta)} I_{[\theta,\infty)}(x).$$

(a) Encontrar el EMV de θ.

(b) Encontrar el estimador de los momentos de θ.

6. Si $X_1, \ldots, X_n$ es una m.a. de una distribución $\mathcal{U}[\theta - 1/2, \theta + 1/2]$, mostrar que cualquier T tal que $X_{(n)} - 1/2 \leq T \leq X_{(1)} + 1/2$ es un EMV de θ.

7. Sean $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución $N(\mu_1, \sigma^2)$ e $Y_1, \ldots, Y_m$ una m.a. de una distribución $N(\mu_2, \sigma^2)$, independientes entre sí.

   (a) Hallar el EMV de $\theta = (\boldsymbol{\mu_1}, \boldsymbol{\mu_2}, \boldsymbol{\sigma^2})$.

   (b) Hallar el EMV de $\alpha = \mu_1 - \mu_2$.

8. Se tienen observaciones independientes $X_1, \ldots, X_n$ de poblaciones normales con la misma media μ pero con varianzas $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2$ respectivamente.

   (a) ¿Es posible estimar todos los parámetros por máxima verosimilitud?

   (b) Suponiendo $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2$ conocidos, hallar el EMV de μ. Interpretar.

9. El número de microorganismos que se encuentran por grupo sobre una superficie sigue la siguiente distribución

$$p(x) = \theta I_{\{1\}}(x) + \frac{1-\theta}{k-1} I_{\{2,3,\ldots,k\}}(x)$$

   donde $0 < \theta < 1$. Supongamos que se examinan en forma independiente n grupos y se cuentan el número de microorganismos $X_1, \ldots, X_n$ en cada uno de ellos. Calcular el estimador de máxima verosimilitud de θ.

C) Estimadores de mínimos cuadrados.

En todos los ejercicios de esta sección se supondrá que $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ son v.a.i.i.d. con media cero.

1. Demostrar que la media muestral $\bar{X}$ es el estimador de mínimos cuadrados (EMC) de θ en el modelo de posición: $X_i = \theta + \varepsilon_i$, $1 \leq i \leq n$.

2. Consideremos el modelo de regresión lineal simple: $X_i = \theta_1 t_i + \theta_2 + \varepsilon_i$, $1 \leq i \leq n$, donde t_i son constantes conocidas. Hallar los EMC de θ_1 y θ_2.

3. Sea el modelo $X_i = S_i(\theta) + \epsilon_i$, $1 \leq i \leq n$, $\theta \in I\!R^{\mathbf{k}}$. Si $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$, mostrar que el EMC y el EMV de θ coinciden.

   Sugerencia: Notar que $X_i \sim N(S_i(\theta), \sigma^2)$.

D) Ejercicio para hacer con la computadora.

- Generar una muestra de tamaño $n = 100$ de una variable aleatoria $\varepsilon(\lambda)$ con $\lambda = 1$ y graficar su distribución empírica junto con la función de distribución acumulada.
- Para la muestra obtenida en la parte a), calcular el estimador de λ por el método de los momentos y por máxima verosimilitud.

- Proponer un estimador de la función de distribución acumulada distinto al obtenido en a) y graficarlo en el gráfico anterior. Qué observa? Mejora su propuesta la estimación dada en a)?

- Qué pasaría con las estimaciones anteriores si tuviéramos otro tamaño de muestra? Repita los puntos anteriores con $n = 10$ y $n = 1000$.