

1. Dada una m.a. X_1, \dots, X_n de una distribución $\mathcal{U}(0, \theta)$, sea $\hat{\theta}_n$ el EMV de θ y $\tilde{\theta}_n$ el estimador de θ basado en el primer momento.
 - (a) Probar que $\tilde{\theta}_n$ es insesgado y que $\hat{\theta}_n$ es asintóticamente insesgado.
 - (b) Calcular el ECM de ambos estimadores. ¿Qué estimador preferiría desde este punto de vista?
 - (c) ¿Cómo modificaría el estimador $\hat{\theta}_n$ para que quede insesgado? Llamemos $\hat{\theta}_n^{\text{mod}}$ a este estimador modificado.
 - (d) (Para hacer con R y para entregar) Para cada uno de los valores $n = 6, 10, 20, 40, 80, 200$ hacer lo siguiente:
 - i. Generar una muestra de tamaño n de una distribución $\mathcal{U}(0, \theta_0)$ con $\theta_0 = 3$.
 - ii. Evaluar los tres estimadores $\tilde{\theta}_n$, $\hat{\theta}_n$ y $\hat{\theta}_n^{\text{mod}}$ en dicha muestra.
 - iii. Repetir los dos pasos anteriores $m = 1000$ veces, obteniendo así, para cada uno de los tres estimadores, replicaciones $\theta_1^*, \dots, \theta_m^*$.
 - iv. Para cada estimador, computar el ECM

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\theta_i^* - \theta_0)^2$$

Finalmente, graficar n vs. el ECM de cada uno de los tres métodos anteriores (todo en un mismo gráfico). Hacer boxplots con los valores estimados $\theta_1^*, \dots, \theta_m^*$. ¿Tienen sentido estos resultados respecto de los resultados teóricos de los primeros items?

2. Supongamos que queremos estimar la proporción p de gente que probó drogas duras. Si nadie tuviese pudor de contestar, lo más lógico sería tomar una muestra aleatoria de n personas de la población, hacerles la pregunta y estimar p con la proporción muestral de personas que respondieron que sí. El problema es que probablemente muchas personas que sí probaron drogas duras van a mentir y contestar que no.
 - (a) Pensar alguna forma alternativa de hacer una encuesta de modo que se pueda estimar p de manera tal que los encuestados no sientan que se viola su privacidad. **IMPORTANTE: tratar de no pasar a la siguiente página sin haber pensado este ítem un poco.**



(b) Consideremos el siguiente procedimiento para la encuesta:

- Se le pide a la persona que tire un dado y no le muestre el resultado al encuestador.
- Si en el dado sale 1 o 2, el encuestado debe contestar la verdad respecto de si probó o no drogas duras.
- Si en el dado sale 3, 4, 5 o 6, el encuestado debe contestar al azar de la siguiente forma: tira una moneda equilibrada, si sale cara responde SÍ y si sale ceca responde NO.
- El encuestador no ve los resultados del procedimiento del encuestado. Sólo sabe si el encuestado responde SÍ o NO (ni siquiera sabe si fue necesaria la tirada de la moneda)

Probar que si los encuestados siguen este procedimiento honestamente, se puede estimar p de forma insesgada.

- (c) Hallar el ECM del estimador obtenido en el ítem anterior. y compararlo con el ECM del estimador en una encuesta clásica (suponiendo que nadie tiene pudor de contestar).
- (d) (Opcional para entregar) Realizar una simulación con condiciones que considere razonables para validar los resultados del ítem anterior.
- (e) (Opcional para entregar) Hacer un análisis similar si se le ocurrió algún estimador en el ítem (a).