Desigualdad de Rao–Cramer
y
Estimadores ANE

Estadística (M)

La pregunta que intentamos responder hoy es:

¿Un estimador insesgado puede tener una varianza arbitrariamente pequeña?

Hipótesis

Consideremos las siguientes hipótesis.

Supongamos que $\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \theta)$, con $\theta \in \Theta$; Θ un conjunto abierto de $\mathbb{R}$.

(A) El conjunto $\mathcal{S} = \{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}, \theta) > 0\}$ es independiente de θ.

(B) Para todo $\mathbf{x}$, $f(\mathbf{x}, \theta)$ es derivable respecto de θ.

(C) Si $h(\mathbf{X})$ es un estadístico tal que $\mathbb{E}_\theta[|h(\mathbf{X})|] < \infty$ para todo $\theta \in \Theta$ entonces se tiene

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \int h(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}, \theta) d\mathbf{x} = \int h(\mathbf{x}) \frac{\partial f(\mathbf{x}, \theta)}{\partial\theta} d\mathbf{x}$$

(D)

$$0 < I_1(\theta) = \mathbb{E}_\theta \left[\left(\frac{\partial \log f(\mathbf{X}, \theta)}{\partial\theta} \right)^2 \right] < \infty$$

$I_1(\theta)$ se denomina *número de información de Fisher*.

Las hipótesis A, C y D nos resultan familiares ya que las hemos usado para probar que los EMV son asintóticamente normales.

(E) Para cada θ_0 fijo

$$\left|\frac{\partial^3 \log f(\mathbf{x},\theta)}{\partial\theta^3}\right| \qquad \leq M$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$ y para todo $\theta \in \Theta$.

Teorema: Sean

- $\widehat{\theta}_n$ un estimador de máxima verosimilitud de θ consistente y
- $q(\theta)$ derivable con $q'(\theta) \neq 0$ para todo θ.

Entonces, si se cumplen A, C, D y E tenemos que

$$\sqrt{n}\left(q(\widehat{\theta}_n) - q(\theta)\right) \xrightarrow{D} N\left(0, \frac{[q'(\theta)]^2}{I_1(\theta)}\right)$$

Hemos probado el siguiente resultado.

Lema: Supongamos que se cumplan las condiciones A, B, C y D. Sea

$$\psi(\mathbf{x},\theta)=\frac{\partial \log(f(\mathbf{x},\theta))}{\partial\theta}$$

Entonces,

(i) $\mathbb{E}_\theta\psi(\mathbf{X},\theta)=0$ y $\mathbb{V}_\theta\psi(\mathbf{X},\theta)=I_1(\theta)$.

(ii) Si además existe la derivada segunda de $f(\mathbf{x},\theta)$ respecto de θ y si para todo estadístico $h(\mathbf{X})$ tal que, $\mathbb{E}_\theta[|h(\mathbf{X})|]<\infty$ para todo $\theta\in\Theta$, se cumple que

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\int h(\mathbf{x})f(\mathbf{x},\theta)d\mathbf{x}=\int h(\mathbf{x})\frac{\partial^2 f(\mathbf{x},\theta)}{\partial\theta^2}d\mathbf{x} \tag{1}$$

entonces

$$I_1(\theta)=-\mathbb{E}_\theta\frac{\partial^2\log f(\mathbf{X},\theta)}{\partial\theta^2}=-\mathbb{E}_\theta\frac{\partial\psi(\mathbf{X},\theta)}{\partial\theta}$$

Teorema de Rao–Cramer

Bajo las condiciones A, B, C y D, si $\delta(\mathbf{X})$ es un estimador insesgado de $q(\theta)$ tal que $\mathbb{E}_\theta \delta^2(\mathbf{X}) < \infty$ se tiene

(a)

$$\mathbb{V}_\theta(\delta(\mathbf{X})) \geq \frac{|q'(\theta)|^2}{I_1(\theta)}$$

(b) La desigualdad en (a) es una igualdad si y sólo si $\delta(\mathbf{X})$ es un estadístico suficiente de una familia exponencial, es decir, si y sólo si

$$f(\mathbf{x}, \theta) = A(\theta) e^{c(\theta)\delta(\mathbf{x})} h(\mathbf{x})$$

Definición. Supongamos que

- $X_i \sim f(x, \theta)$
- El conjunto $\mathcal{S} = \{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}, \theta) > 0\}$ es independiente de θ.
- Para todo $\mathbf{x}$, $f(\mathbf{x}, \theta)$ es derivable respecto de θ.

Se dice que $\delta_n(X_1, \ldots, X_n)$ es una sucesión de estimadores asintóticamente normal y eficiente (A.N.E.) si

$$\sqrt{n}(\delta_n(X_1, \ldots, X_n) - q(\theta)) \xrightarrow{D} N\left(0, \frac{[q'(\theta)]^2}{I_1(\theta)}\right)$$

En estos términos, podríamos reescribir el teorema anterior sobre los EMV como

Teorema Si

- $\widehat{\theta}_n$ un estimador de máxima verosimilitud de θ consistente y
- $q(\theta)$ derivable con $q'(\theta) \neq 0$ para todo θ.

Entonces, si se cumplen A, C, D y E, tenemos que $q(\widehat{\theta}_n)$ es A.N.E. para estimar $q(\theta)$.

Lema

Sea $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_q)$ un vector aleatorio con distribución perteneciente a una familia exponencial a un parámetro continua tal que

$$p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = A(\theta) e^{c(\theta) r(\mathbf{x})} h(\mathbf{x})$$

- $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$, Θ abierto.
- $c(\theta)$ infinitamente derivable.

Luego, si $m(\mathbf{x})$ es un estadístico tal que

$$\int |m(\mathbf{x})| p(\mathbf{x}, \theta) d\mathbf{x} < \infty \quad \forall\, \theta \in \Theta$$

entonces, la expresión

$$\int \ldots \int m(\mathbf{x}) e^{c(\theta) r(\mathbf{x})} h(\mathbf{x}) dx_1 \ldots dx_q$$

es infinitamente derivable y se puede derivar dentro del signo integral.

En el caso discreto, se reemplazan las integrales por sumatorias.