Tests de hipótesis y Regiones de confianza

¿Hay alguna relación entre tests de hipótesis
e
intervalos de confianza?

Veamos un ejemplo

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, (μ, σ^2) desconocidos.

Test de CMV para $H_0 : \mu = \mu_0$ versus $H_1 : \mu \neq \mu_0$

$$\phi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n}\frac{|\overline{X}-\mu_0|}{s} \geq t_{n-1,\alpha/2} \\ 0 & \text{si } \sqrt{n}\frac{|\overline{X}-\mu_0|}{s} < t_{n-1,\alpha/2} \end{cases}$$

Veamos un ejemplo

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, (μ, σ^2) desconocidos.

Test de CMV para $H_0 : \mu = \mu_0$ versus $H_1 : \mu \neq \mu_0$

$$\phi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n}\frac{|\overline{X}-\mu_0|}{s} \geq t_{n-1,\alpha/2} \\ \\ 0 & \text{si } \sqrt{n}\frac{|\overline{X}-\mu_0|}{s} < t_{n-1,\alpha/2} \end{cases}$$

Luego: para cada μ_0:

$\mathcal{A}(\mu_0)$: Región de aceptación de ϕ_{μ_0}

$$\mathcal{A}(\mu_0) : \left\{ \mathbf{X} : \sqrt{n}\frac{|\overline{X} - \mu_0|}{s} \leq t_{n-1,\alpha/2} \right\}$$

Veamos un ejemplo

Tenemos que

$$\mathcal{S}(\mathbf{X}) : \{\mu : \sqrt{n}\frac{|\overline{X} - \mu|}{s} \leq t_{n-1,\alpha/2}\}$$

$$\mathcal{S}(\mathbf{X}) = \left(\overline{X} - t_{n-1,\alpha/2}\,\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{n-1,\alpha/2}\,\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

es un intervalo de confianza de nivel $1 - \alpha$.

Regiones de confianza

Dado un vector $\mathbf{X}$ con distribución perteneciente a la familia $F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ con $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$, *una región de confianza $\mathcal{S}(\mathbf{X})$ para $\boldsymbol{\theta}$ con nivel de confianza* $1-\alpha$ será una función que a cada $\mathbf{X}$ le hace corresponder un subconjunto $\mathcal{S}(\mathbf{X}) \subset \Theta$ de manera que

$$\mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{S}(\mathbf{X})) = 1-\alpha, \qquad \forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta$$

Es decir, $\mathcal{S}(\mathbf{X})$ cubre el valor verdadero del parámetro con probabilidad $1-\alpha$.

Regiones de confianza

Dado un vector $\mathbf{X}$ con distribución perteneciente a la familia $F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ con $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$, *una región de confianza* $\mathcal{S}(\mathbf{X})$ *para* $\boldsymbol{\theta}$ *con nivel de confianza* $1-\alpha$ será una función que a cada $\mathbf{X}$ le hace corresponder un subconjunto $\mathcal{S}(\mathbf{X}) \subset \Theta$ de manera que

$$\mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{S}(\mathbf{X})) = 1-\alpha, \qquad \forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta$$

Es decir, $\mathcal{S}(\mathbf{X})$ cubre el valor verdadero del parámetro con probabilidad $1-\alpha$.

Caso particular: Si $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}$ se dirá que $\mathcal{S}(\mathbf{X})$ es un intervalo de confianza

$$\mathcal{S}(\mathbf{X}) = [a(\mathbf{X}), b(\mathbf{X})]$$

La longitud de $\mathcal{S}(\mathbf{X})$ es

$$L = b(\mathbf{X}) - a(\mathbf{X})$$

Relación entre Tests e Intervalos de confianza

- $\mathbf{X} \sim F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$.
  Para cada $\boldsymbol{\theta}_0$ fijo sea $\phi_{\boldsymbol{\theta}_0}$, un test no aleatorizado de nivel α, para

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 \quad \text{versus} \quad H_1 : \boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}_0.$$

Relación entre Tests e Intervalos de confianza

- $\mathbf{X} \sim F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$.
  Para cada $\boldsymbol{\theta}_0$ fijo sea $\phi_{\boldsymbol{\theta}_0}$, un test no aleatorizado de nivel α, para
  $$H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 \quad \text{versus} \quad H_1 : \boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}_0.$$
- $\mathcal{A}(\boldsymbol{\theta}_0)$: Región de aceptación de $\phi_{\boldsymbol{\theta}_0}$
- Notemos que
  $$P_{\theta_0}(\mathbf{X} \in \mathcal{A}(\boldsymbol{\theta}_0)) = 1 - \alpha$$
- Familias de regiones de aceptación:
  $\mathcal{S}(\mathbf{X}) = \{\boldsymbol{\theta} : \phi_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X}) = 0\} = \{\boldsymbol{\theta} : \mathbf{X} \in \mathcal{A}(\boldsymbol{\theta})\}$

  $\Longrightarrow \mathcal{S}(\mathbf{X})$ es una región de confianza de nivel $1 - \alpha$ para $\boldsymbol{\theta}$

Relación entre Test e Intervalos de confianza

- Recíprocamente, si $\mathcal{S}(\mathbf{X})$ es una región de confianza de nivel $1-\alpha$ para $\boldsymbol{\theta}$, el test

$$\phi_{\boldsymbol{\theta}_0}(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \boldsymbol{\theta}_0 \notin \mathcal{S}(\mathbf{X}) \\ 0 & \text{si } \boldsymbol{\theta}_0 \in \mathcal{S}(\mathbf{X}) \; . \end{cases}$$

es un test de nivel de α para testear

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 \quad \text{versus} \quad H_1 : \boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}_0.$$

Relación entre Test e Intervalos de confianza

En general podemos decir que:

- Para obtener un intervalos de confianza $[L(\mathbf{X}), U(\mathbf{X})])$ podemos invertir la región de aceptación de un test de la forma $H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs. \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$
- Para obtener una cota inferior de confianza $[L(\mathbf{X}), \infty)$ podemos invertir la región de aceptación de un test de la forma $H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs. \quad H_1 : \theta > \theta_0$
- Para obtener una cota superior de confianza $(-\infty, U(\mathbf{X})]$ podemos invertir la región de aceptación de un test de la forma $H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs. \quad H_1 : \theta < \theta_0$