¿Siempre existe un test UMP?

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a de una distribución $N(\mu, \sigma_0^2)$ con σ_0 conocido

Queremos testear

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ vs. } H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Veremos que no existe un test uniformemente más potente a nivel menor o igual que α.

¿Siempre existe un test UMP?

Si existiera tal test, φ, entonces sería el test más potente a nivel menor o igual que α para

$$H_0^*: \mu = \mu_0 \text{ vs. } H_1^*: \mu = \mu_1 \quad (\mu_1 > \mu_0)$$

y para

$$H_0^{**}: \mu = \mu_0 \text{ vs. } H_1^{**}: \mu = \mu_1 \quad (\mu_1 < \mu_0)$$

Pero, por el Teorema que vimos el test más potente para H_0^* contra H_1^* está dado por

$$\varphi_1(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n}\dfrac{(\overline{X} - \mu_0)}{\sigma_0} \geq z_\alpha \\ \\ 0 & \text{si } \sqrt{n}\dfrac{(\overline{X} - \mu_0)}{\sigma_0} < z_\alpha \end{cases}$$

¿Siempre existe un test UMP?

Por otro lado, el test más potente para H_0^{**} contra H_1^{**} es

$$\varphi_2(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n}\dfrac{(\overline{X} - \mu_0)}{\sigma_0} \leq -z_\alpha \\ \\ 0 & \text{si } \sqrt{n}\dfrac{(\overline{X} - \mu_0)}{\sigma_0} > -z_\alpha \end{cases}$$

Entonces, por la unicidad dada en el Teorema de Neyman-Pearson, φ debería coincidir con φ_1 y con φ_2 lo cual es imposible.

No siempre existe un test UMP

En tales situaciones, así como hicimos en estimación cuando buscamos estimadores óptimos dentro de los insesgados, podríamos tratar de buscar un test óptimo en una clase más chica.

TEST IUMP

- Un test ϕ de nivel α para $H_0 : \theta \in \Theta_0$ vs. $H_1 : \theta \in \Theta_1$, se dice insesgado si

$$\beta_\phi(\theta) \geq \alpha \qquad \forall\, \theta \in \Theta_1$$

- ϕ es un test **IUMP de nivel α** si
  i) $\sup_{\theta \in \Theta_0} \beta_\phi(\theta) = \alpha$
  ii) ϕ es insesgado
  iii) para todo ϕ^* tal que $\begin{cases} \text{a)} & \sup_{\theta \in \Theta_0} \beta_{\phi^*}(\theta) = \alpha \\ \text{b)} & \phi^* \text{ es insesgado} \end{cases}$

  se verifica

$$\beta_\phi(\theta) \geq \beta_{\phi^*}(\theta) \qquad \forall\, \theta \in \Theta_1$$

El procedimiento que veremos da en muchos casos tests IUMP.

Test de Cociente de Máxima verosimilitud

$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ y queremos testear

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \text{ versus } H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1 \qquad \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$$

Veamos cuál es la motivación de este método.

- $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_0$: EMV de $\boldsymbol{\theta}$, suponiendo $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$
- $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1$: EMV de $\boldsymbol{\theta}$, suponiendo $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{X}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_0) &= \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) \\ f(\mathbf{X}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_1) &= \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_1} f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) \end{aligned}$$

Si "nos olvidásemos" de que $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_0$ y $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1$ son aleatorios,
y procediésemos en consecuencia, podríamos hacer lo que sigue:

Test de Cociente de Máxima verosimilitud

$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ y queremos testear

$$H_0: \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \text{ versus } H_1: \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1 \qquad \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$$

$$L_{10} = \frac{f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_1)}{f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_0)} \geq k_\alpha$$

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_1) > k_\alpha\, f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_0) \\ \gamma_\alpha & \text{si } f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_1) = k_\alpha\, f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_0) \\ 0 & \text{si } f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_1) < k_\alpha\, f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_0) \end{cases}$$

Test de Cociente de Máxima verosimilitud

$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ y queremos testear

$H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$ versus $H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1 \quad \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$

$$L(\mathbf{X}) = \frac{1}{L_{10}} = \frac{f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_0)}{f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_1)} \leq k_\alpha$$

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } L(\mathbf{X}) < k_\alpha \\ \gamma_\alpha & \text{si } L(\mathbf{X}) = k_\alpha \\ 0 & \text{si } L(\mathbf{X}) > k_\alpha \end{cases}$$

Test de Cociente de Máxima verosimilitud

$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ y queremos testear

$H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$ versus $H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1 \quad \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$

$$L(\mathbf{X}) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} f(\mathbf{x}, \theta)}{\sup_{\theta \in \Theta_1} f(\mathbf{x}, \theta)}$$

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } L(\mathbf{X}) < k_\alpha \\ \gamma_\alpha & \text{si } L(\mathbf{X}) = k_\alpha \\ 0 & \text{si } L(\mathbf{X}) > k_\alpha \end{cases}$$

Test de Cociente de Máxima verosimilitud

$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ y queremos testear

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \text{ versus } H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1 \qquad \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$$

Si $\sup_{\theta \in \Theta_1} f(\mathbf{x}, \theta) = \sup_{\theta \in \Theta} f(\mathbf{x}, \theta)$

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } L^*(\mathbf{X}) < k_\alpha \\ \gamma_\alpha & \text{si } L^*(\mathbf{X}) = k_\alpha \\ 0 & \text{si } L^*(\mathbf{X}) > k_\alpha \end{cases}$$

$$L^*(\mathbf{X}) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} f(\mathbf{x}, \theta)}{\sup_{\theta \in \Theta} f(\mathbf{x}, \theta)}$$

Veamos un par de ejemplos.

Test de CMV para $H_0: \mu = \mu_0$ versus $H_1: \mu \neq \mu_0$

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ_0^2 conocida.

Como $\Theta_0 = \{\mu_0\}$, tiene dimensión 0, menor que la de Θ, luego basamos el test en L^*.

Tenemos que

$$\sup_{\mu \in \Theta_0} p(\mathbf{X}, \mu) = (2\pi\sigma_0^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\,\sigma_0^2}\Sigma_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}$$

$$\sup_{\mu \in \Theta} p(\mathbf{X}, \mu) = (2\pi\sigma_0^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\,\sigma_0^2}\Sigma_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2} \quad .$$

Luego, como

$$L^* = e^{-\frac{1}{2\,\sigma_0^2}\left(\Sigma_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2 - \Sigma_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2\right)}$$

obtenemos el siguiente test.

Test de CMV para $H_0 : \mu = \mu_0$ versus $H_1 : \mu \neq \mu_0$

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ_0^2 conocida.

El test de cociente de máxima verosimilitud es

$$\phi_1(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n}\frac{|\overline{X}-\mu_0|}{\sigma_0} \geq z_{\alpha/2} \\ \\ 0 & \text{si } \sqrt{n}\frac{|\overline{X}-\mu_0|}{\sigma_0} < z_{\alpha/2} \end{cases}$$

cumple

$$\beta_\phi(\mu_0) = \alpha$$

Este test resulta IUMP.

Test de CMV para $H_0 : \mu = \mu_0$ versus $H_1 : \mu \neq \mu_0$

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, (μ, σ^2) desconocidos.

Aquí tenemos:

- $\Theta_0 = \{(\mu_0, \sigma^2) : 0 < \sigma^2 < \infty\}$ de dimensión 1.
- $\Theta = \{(\mu, \sigma^2) : -\infty < \mu < \infty,\ 0 < \sigma^2 < \infty\}$ de dimensión 2.
- Luego, usaremos el test basado en L^*.

Veremos que:

$$\sup_{(\mu,\sigma^2)\in\Theta_0} p(\mathbf{X}, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{e^{\frac{n}{2}} (2\pi)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}$$

y el supremos sin restricciones es:

$$\sup_{(\mu,\sigma^2)\in\Theta} p(\mathbf{X}, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{e^{\frac{n}{2}} (2\pi)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}} \ .$$

Test de CMV para $H_0 : \mu = \mu_0$ versus $H_1 : \mu \neq \mu_0$

Luego:

$$L^* = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2} \right]^{\frac{n}{2}} .$$

Como

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2 + n(\overline{X} - \mu_0)^2$$

se tiene que

$$L^* = \left[1 + \frac{n(\overline{X} - \mu_0)^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2} \right]^{-\frac{n}{2}} .$$

Sea

$$T = \sqrt{n} \frac{(\overline{X} - \mu_0)}{s}$$

donde $s^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2/(n-1)$. Luego,

$$L^* = \left[\frac{1}{1 + \frac{T^2}{n-1}} \right]^{\frac{n}{2}}$$

Test de CMV para $H_0 : \mu = \mu_0$ versus $H_1 : \mu \neq \mu_0$

$$L^* = \left[\frac{1}{1 + \frac{T^2}{n-1}} \right]^{\frac{n}{2}}$$

Como $g(t) = 1/(1 + t^2/(n-1))$ es monótona decreciente de $|t|$, el test resulta equivalente a

$$\varphi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |T| \geq k_\alpha \\ 0 & \text{si} \quad |T| < k_\alpha \end{cases}$$

y k_α será elegido de manera que el test resulte con nivel de significación α, es decir, de manera que

$$P_{\mu_0}(|T| \geq k_\alpha) = \alpha \ .$$

Como T tiene distribución student con $n-1$ grados de libertad, resulta

$$k_\alpha = t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} \ .$$

Test de CMV para $H_0 : \mu = \mu_0$ versus $H_1 : \mu \neq \mu_0$

El test de cociente de máxima verosimilitud es

$$\phi_1(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n}\frac{|\overline{X}-\mu_0|}{s} \geq t_{n-1,\alpha/2} \\ \\ 0 & \text{si } \sqrt{n}\frac{|\overline{X}-\mu_0|}{s} < t_{n-1,\alpha/2} \end{cases}$$

Estudiaremos la potencia del test.

Para ello necesitaremos la siguiente distribución.

Distribución $\mathcal{T}_\nu(\Delta)$

- *Distribución de Student no central con ν grados de libertad y parámetro de no centralidad Δ*: $\mathcal{T}_\nu(\Delta)$ es la distribución de

  $$\frac{Z+\Delta}{\sqrt{U/\nu}}$$

  con $Z \sim N(0,1)$ independiente de $U \sim \chi^2_\nu$v.

- Sea $\Delta = \sqrt{n}(\mu - \mu_0)/\sigma$. Veremos que la potencia del test depende de (μ, σ^2) solo a través de $|\Delta|$ y que es una función estrictamente creciente en $|\Delta|$.

Este test también resulta IUMP.

Este es un caso particular

TEST IUMP: $H_0: \ \theta = \theta_0 \quad H_1: \ \theta \neq \theta_0$

$$f(x,\theta) = A(\theta)\ \exp\{\theta\, T(x)\} h(x)$$

Test bilateral

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } T(x) < c_1 \quad \text{o} \quad T(x) > c_2 \\ \gamma_i & \text{si } T(x) = c_i \ i = 1,2 \\ 0 & \text{si } c_1 < T(x) < c_2 \end{cases}$$

tal que (c_i, γ_i) se eligen de modo que

$$\beta_\phi(\theta_0) = \alpha \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial}{\partial\theta}\beta_\phi(\theta)\Big|_{\theta=\theta_0} = 0$$

es **IUMP de nivel α** para H_0 versus H_1.