Familias de CVM

Una familia de distribuciones discretas o continuas con densidad (o función de probabilidad puntual) $f(\mathbf{x}, \theta)$, $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbb{R}$ se dice de *cociente de verosimilitud monótono* **(CVM)** en $T = T(\mathbf{X})$, si para todo $\theta_1 < \theta_2$

(i) Las distribuciones correspondientes a $f(\mathbf{x}, \theta_1)$ y $f(\mathbf{x}, \theta_2)$ son distintas

(ii) $\dfrac{f(\mathbf{x}, \theta_2)}{f(\mathbf{x}, \theta_1)} = g_{\theta_1 \theta_2}(T(\mathbf{x}))$, donde $g_{\theta_1 \theta_2}(t)$ es una función no decreciente en el conjunto

$$\mathcal{S} = \{t : t = T(\mathbf{x}) \quad \text{con } f(\mathbf{x}, \theta_1) > 0 \text{ ó } f(\mathbf{x}, \theta_2) > 0\}$$

Familias Exponenciales

Es sencillo mostrar que las familias exponenciales a un parámetro con $c(\theta)$ estrictamente monótona son de CVM.

Teorema. *Sea la familia exponencial a un parámetro con función de densidad o probabilidad* $p(\mathbf{x}, \theta) = A(\theta)e^{c(\theta)r(\mathbf{x})}h(\mathbf{x})$ *con* $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$*. Luego,*

(i) *Si* $c(\theta)$ *es estrictamente creciente la familia dada es de CVM en* $r(\mathbf{X})$

(ii) *Si* $c(\theta)$ *es estrictamente decreciente la familia dada es de CVM en* $-r(\mathbf{X})$

Familias Exponenciales

Es sencillo mostrar que las familias exponenciales a un parámetro con $c(\theta)$ estrictamente monótona son de CVM.

Teorema. *Sea la familia exponencial a un parámetro con función de densidad o probabilidad* $p(\mathbf{x}, \theta) = A(\theta) e^{c(\theta) r(\mathbf{x})} h(\mathbf{x})$ *con* $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$. *Luego,*

(i) *Si* $c(\theta)$ *es estrictamente creciente la familia dada es de CVM en* $r(\mathbf{X})$

(ii) *Si* $c(\theta)$ *es estrictamente decreciente la familia dada es de CVM en* $-r(\mathbf{X})$

La propiedad no se limita a las familias exponenciales, veamos un ejemplo en las Uniformes.

Familias de CVM: Teorema

Sea $\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \theta)$ *con* $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$, *perteneciente a una familia de CVM en* $T = T(\mathbf{X})$. *Luego*

(i) Existen k_α y γ_α tales que

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } T > k_\alpha \\ \gamma_\alpha & \text{si } T = k_\alpha \\ 0 & \text{si } T < k_\alpha \end{cases} \tag{4}$$

satisface

$$\mathbb{E}_{\theta_0}(\phi(\mathbf{X})) = \alpha \ . \tag{5}$$

(ii) Sea ϕ es un test de la forma (4) que satisface (5). Luego ϕ es el test **UMP** de nivel menor o igual que $\alpha > 0$ para

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{contra} \quad H_1 : \theta > \theta_0 \ .$$

Familias de CVM: Teorema

(iii) $\beta_\phi(\theta)$ es monótona no decreciente para todo θ y estrictamente creciente para todo θ tal que $0 < \beta_\phi(\theta) < 1$.

(iv) Sea ϕ un test de la forma (4) que satisface (5). Luego, ϕ es el test **UMP** de nivel menor o igual que $\alpha > 0$ para

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad \text{contra} \quad H_1 : \theta > \theta_0 \,.$$

Familias de CVM: Teorema

Sea $\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \theta)$ *con* $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$, *perteneciente a una familia de CVM en* $T = T(\mathbf{X})$. *Luego*

(i) Existen k_α y γ_α tales que

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } T < k_\alpha \\ \gamma_\alpha & \text{si } T = k_\alpha \\ 0 & \text{si } T > k_\alpha \end{cases} \tag{6}$$

satisface

$$\mathbb{E}_{\theta_0}(\phi(\mathbf{X})) = \alpha \ . \tag{7}$$

(ii) Sea ϕ es un test de la forma (6) que satisface (7). Luego ϕ es el test **UMP** de nivel menor o igual que $\alpha > 0$ para

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{contra} \quad H_1 : \theta < \theta_0 \ .$$

Familias de CVM: Teorema

(iii) $\beta_\phi(\theta)$ es monótona no creciente para todo θ y estrictamente decreciente para todo θ tal que $0 < \beta_\phi(\theta) < 1$.

(iv) Sea ϕ un test de la forma (6) que satisface (7). Luego, ϕ es el test **UMP** de nivel menor o igual que $\alpha > 0$ para

$$H_0 : \theta \geq \theta_0 \quad \text{contra} \quad H_1 : \theta < \theta_0 \, .$$

Veamos un ejemplo con la distribución Poisson.