Tests de Hipótesis

Estadística (M)

Ejemplo

Una empresa sabe por sus registros históricos que en cada uno de los años anteriores los empleados han faltado un promedio de **6.3** días.

Este año la empresa introdujo un sistema de **horarios flexibles** y eligió una muestra de 100 empleados para seguirlos a lo largo del año.

Al final del año, esos empleados faltaron **un promedio de 5.34 días** al trabajo.

El equipo de personal se reunió y esta es la conversación que mantienen.

- Investigador **(I)**. Entre otros hechos el horario flexible reduce el ausentismo, que pasó de 6.3 a 5.34 días este año.
- Escéptico **(E)**. No creo en su afirmación. Su muestra es sólo de 100 empleados sobre los 5000 de la empresa; sólo por suerte en la selección han elegido a los empleados más trabajadores. Lo que usted muestra es sólo una variación aleatoria. ¿Cuál es el desvío estándar de su muestra?

I Los días de ausencia promediaron 5.3 y el desvío estándar muestral es de 3 días.

E La diferencia entre 6.3 y 5.3 es mucho menor que un desvío estándar; luego para mí es mero azar.

I No es así. La empresa tiene a los 5000 empleados que son todos igualmente representativos, sería como tener 5000 bolillas en una caja, una por cada empleado, que indica cuántos días faltó. Ahora sacamos 100 bolillas y la única información que tenemos es sobre esas 100 bolillas.

I Lo que nos preocupa es conocer el promedio de la caja. Usted dice que aún es 6.3 y yo que descendió.

E Digo que lo que observó se debe a la casualidad porque hay demasiados números chicos en su muestra.

I Notemos que como no conocemos el desvío estándar poblacional lo podemos estimar por el de la muestra, o sea, por 3 días. ¿De acuerdo?

E Sí.

I Bueno. Entonces ahora el error estándar (SE) para el promedio es $\frac{3}{\sqrt{100}} = 0.3$ días.

Luego, supongamos que está en lo cierto y que el promedio de la población sea aún 6.3 días. Entonces, debería esperar que el promedio de la muestra esté alrededor de 6.3 y en realidad está más allá de 3 SE ya que $\frac{(5.3 - 6.3)}{0.3} = -3.33$.

E Hmm...

I Tenemos suficientes datos como para usar la aproximación normal a la distribución de los promedios y el área a la izquierda de -3.3 es menor a 0.001. En virtud de la aproximaión normal, es aproximadamente 0.000434.

E Es cierto.

I Bueno, ahora debe hacer su elección. O bien sigue sosteniendo que su promedio es 6.3 días o bien coincide conmigo en que el promedio de ausencia bajó.
Si se mantiene en su posición de 6.3 días, necesita un milagro casi para explicar los datos obtenidos pues hay una posibilidad menor a uno en mil de estar tan lejos de su valor esperado.

E Bueno, y cuánto piensa que es su valor promedio?

I Lo estimo por 5.3 con un desvío de 0.3 días. Tuvimos entonces una pequeña reducción en los días de ausencia, pero es una reducción real, o sea, no la puedo atribuir al azar.

Este ejemplo muestra que el investigador trata de probar la validez de su hipótesis de real disminución del ausentismo por un cálculo aleatorio.

Este cálculo es un *test de significación*.

En este ejemplo se tiene una disyuntiva que involucre al ausentismo medio, θ.

La discusión es acerca de dos posibilidades:

$$\mu = 6.3 \quad \text{vs.} \quad \mu < 6.3$$

Definiciones

- Hipótesis Nula: Se indica H_0, es la que sostiene que la diferencia observada se debe al azar.

- Hipótesis Alternativa: Se indica H_1, es la que sostiene que la diferencia observada es real. En general es la hipótesis que uno quiere probar.

- Hipótesis simple: La hipótesis se dice simple si la suposición de que la hipótesis sea cierta lleva a una sóla función de probabilidad.

- Si esto no ocurre se dice Hipótesis compuesta.

Notemos que en nuestro ejemplo

$$H_0 : \mu = 6.3 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu < 6.3$$

Parece razonable la siguiente regla

$$\begin{cases} \text{rechazamos } H_0 & \text{si } T(\mathbf{X}) = \dfrac{\bar{X} - 6.3}{S/\sqrt{100}} \text{ es "pequeño"} \\ \text{no rechazamos } H_0 & \text{en c.c.} \end{cases}$$

Podemos reescribirla como para algún k que elegiremos

$$\begin{cases} \text{rechazamos } H_0 & \text{si } T(\mathbf{X}) = \dfrac{\bar{X} - 6.3}{S/\sqrt{100}} \leq k \\ \text{no rechazamos } H_0 & \text{en c.c.} \end{cases}$$

Planteo general del problema

- $\mathbf{X} \sim F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$
- Θ_0 y Θ_1 tales que $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$ y $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$.
- En lugar indicar rechazo o no rechazo, podríamos introducir valores numéricos que representen estas situaciones.
  Un test será una regla basada en $\mathbf{X}$ para decidir entre las dos hipótesis

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \qquad \text{contra} \qquad H_1 : \theta \in \Theta_1$$

- Un *Test* es una una función $\phi : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$.

ϕ es *no aleatorizado* si toma los valores 0 ó 1:

$$\phi : \mathbb{R}^n \to \{0, 1\}$$

Test de hipótesis

- $\phi(\mathbf{X}) = 1$ indica que rechazo H_0 y por lo tanto, se acepta H_1.
- $\phi(\mathbf{X}) = 0$ indica que no se rechaza H_0

- La *región crítica* $\mathcal{R}$, de un test ϕ, es el conjunto de puntos $\mathbf{X}$ que llevan a la decisión de rechazar H_0

- La *región de aceptación* $\mathcal{A}$ es el conjunto de puntos $\mathbf{X}$ que llevan a aceptar H_0.

Tipos de errores

	H_0 es cierta	H_1 es cierta
Decidimos Rechazar H_0	ERROR I	BIEN
Decidimos No Rechazar H_0	BIEN	ERROR II

- Se llamará *error de tipo 1* al que se comete al rechazar H_0, cuando es verdadera.

$$\mathbb{P}(\text{ERROR I}) = \mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}}(\mathcal{R}) \quad \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$$

- Se llamará *error de tipo 2* al que se comete al aceptar H_0, cuando es falsa.

$$\mathbb{P}(\text{ERROR II}) = 1 - \mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}}(\mathcal{R}) \quad \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$$

Nivel y Potencia

- Se llama *función de potencia del test* $\phi(\mathbf{X})$ a la función

$$\beta_\phi(\boldsymbol{\theta}) = \mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}}(\text{rechazar } H_0) = \mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}}(\mathcal{R}),$$

- Para todo test se tiene: $\beta_\phi(\boldsymbol{\theta}) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}}(\phi(\mathbf{X}))$.

- $P_\theta(\text{ERROR I}) = \beta_\phi(\boldsymbol{\theta})$ para $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$.

- $P_\theta(\text{ERROR II}) = 1 - \beta_\phi(\boldsymbol{\theta})$ para $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$.

Nivel y Potencia

- P_θ(ERROR I) $= \beta_\phi(\boldsymbol{\theta})$ para $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$.

- P_θ(ERROR II) $= 1 - \beta_\phi(\boldsymbol{\theta})$ para $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$.

- Si la hipótesis nula es simple, la P_θ(ERROR I) se indica por α y recibe el nombre de nivel del test. Notemos que relación guarda con el k de nuestro ejemplo.

- Si la hipótesis nula es compuesta la P_θ(ERROR I) depende de en qué $\theta \in \Theta_0$ es cierta, α y en este caso nivel del test se define como el supremo de estas probabilidades.

Tests aleatorizados

Si el test toma valores distintos de 0 y 1 se dice que es un *test aleatorizado*.

ϕ es *aleatorizado* si toma valores en $[0, 1]$:

$$\phi : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$$

En este caso $\phi(\mathbf{x})$ es la probabilidad de rechazar H_0 cuando se observa $\mathbf{x}$.

Si el test es *aleatorizado*

$$\phi(\mathbf{x}) = P(\text{rechazar } H_0 | \mathbf{X} = \mathbf{x})$$

Así, por ejemplo, si $\phi(\mathbf{x}) = 1/2$, indica que al observar el valor $\mathbf{x}$, debríamos tirar una moneda equilibrada para decidir entre H_0 y H_1.

¿Por qué aleatorizar?

Muestra de $n = 10$ compradores, θ probabilidad de que un comprador elegido al azar compre un auto de una determinada marca.

$$H_0 : \theta = 1/2 \qquad \text{contra} \qquad H_1 : \theta < 1/2$$

$X =$ número de compradores de autos de esa marca entre los 10 elegidos $X \sim Bi(10, \theta)$.

Queda claro que valores pequeños de X llevarán a rechazar H_0

$\theta \mid k$	0	1	2	3	4	5
0.5	0.00097	0.01074	0.05468	0.17187	0.37695	0.62304
0.4	0.00604	0.04635	0.16728	0.38228	0.63310	0.83376
0.3	0.02824	0.14931	0.38278	0.64961	0.84973	0.95265

¿Por qué aleatorizar?

$$\phi_k(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } X \leq k \\ 0 & \text{si } X > k \end{cases}$$

	0	1	2	3	4	5
0.5	0.00097	0.01074	0.05468	0.17187	0.37695	0.62304

$$\begin{aligned} k = 3 \Rightarrow \beta_{\phi_3}(0.5) &= 0.17187 < 0.25 \\ k = 4 \Rightarrow \beta_{\phi_4}(0.5) &= 0.37695 > 0.25 \end{aligned}$$

¿Por qué aleatorizar?

$$\phi_k(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } X \leq k \\ 0 & \text{si } X > k \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \beta_{\phi_3}(0.5) &= 0.17187 < 0.25 \\ \beta_{\phi_4}(0.5) &= 0.37695 > 0.25 \end{aligned}$$

$$\phi(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } X < 4 \\ \gamma = 0.074 & \text{si } X = 4 \\ 0 & \text{si } X > 4 \end{cases}$$

$\beta_\phi(0.5) = 0.25$

Si elegimos el test dado por

$$\phi(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } X < 4 \\ \gamma = 0.074 & \text{si } X = 4 \\ 0 & \text{si } X > 4 \end{cases}$$

tenemos que si $X \leq 3$, rechazamos H_0, si $X > 4$, no rechazamos H_0 y si $X = 4$, elegimos un número al azar entre 0 y 1 y si es menor o igual a 0.074 rechazamos H_0, si no se acepta.

Potencia de $\phi_2(X)$

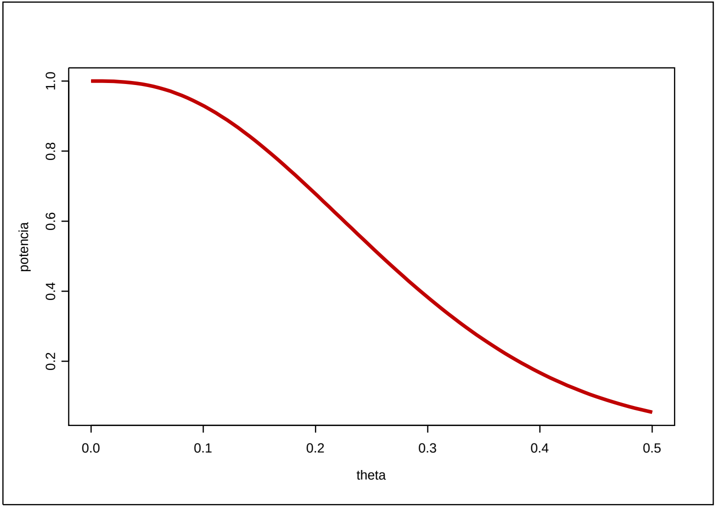
Supongamos que somos más estrictos y elegimos el test

$$\phi_2(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } X \leq 2 \\ 0 & \text{si } X > 2 \end{cases}$$

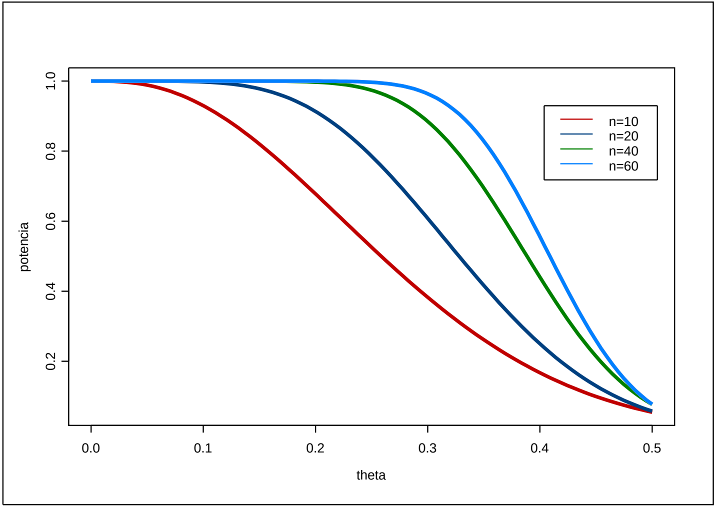
$\beta_{\phi_2}(0.5) = 0.05468$

	0	1	2	3	4	5
0.5	0.00097	0.01074	0.05468	0.17187	0.37695	0.62304
0.4	0.00604	0.04635	0.16728	0.38228	0.63310	0.83376
0.3	0.02824	0.14931	0.38278	0.64961	0.84973	0.95265

Función de Potencia



Función de Potencia



Nivel de significación

- El *nivel de significación* de un test ϕ:

$$\alpha = \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} \beta_\phi(\boldsymbol{\theta})$$

- $\mathbf{X} \sim F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \quad H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \qquad H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$
  ϕ es el test *más potente* de nivel menor o igual que α para una alternativa fija $\boldsymbol{\theta}_1 \in \Theta_1$ si
  (a) $\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} \beta_\phi(\boldsymbol{\theta}) \leq \alpha$
  (b) Dado ϕ^* de nivel menor o igual que α se tiene

$$\beta_{\phi^*}(\boldsymbol{\theta}_1) \leq \beta_\phi(\boldsymbol{\theta}_1)$$

TEST UMP

- ϕ es un test *uniformemente más potente*, **UMP**, de nivel menor o igual que α para

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \qquad\qquad H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$$

si

(a) $\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} \beta_\phi(\boldsymbol{\theta}) \leq \alpha$

(b) Dado ϕ^* de nivel menor o igual que α se tiene

$$\beta_{\phi^*}(\boldsymbol{\theta}_1) \leq \beta_\phi(\boldsymbol{\theta}_1) \qquad\qquad \boldsymbol{\theta}_1 \in \Theta_1$$

Teorema de Neyman Pearson

Comencemos por el caso más sencillo:

Θ_0 y Θ_1 son hipótesis simples y que $\mathbf{X}$ tiene distribución discreta: $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ es una f.p.p.

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 \qquad H_1 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_1$$

Parece Razonable rechazar H_0 si $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1)$ es mayor que $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0)$ Es decir si

$$\frac{p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1)}{p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0)} > k_\alpha$$

donde k_α se elegirá de manera de alcanzar el nivel deseado α.

Teorema de Neyman Pearson: un ejemplo

x	0	1	2
$p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0)$	0.05	0.05	0.90
$p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1)$	0.90	0.08	0.02

Queremos construir un test de nivel 0.05.

1. La región crítica $\mathcal{R} = \{0\}$ tiene nivel 0.05
2. La región crítica $\mathcal{R}^* = \{1\}$ tiene nivel 0.05
3. ¿Alguno de los dos tests es mejor que el otro?

La región $\mathcal{R}$ es preferible a la $\mathcal{R}^*$ cuando analizamos que ocurre con la probabilidad de rechazar H_0 si $\theta = \theta_1$:

$\mathbb{E}_{\theta_1}(\phi)(X) = 0.90$

$\mathbb{E}_{\theta_1}(\phi^*)(X) = 0.08$

Tenemos que: $\dfrac{0.90}{0.05} = 18 \quad \dfrac{0.08}{0.05} = 1.6$

Teorema de Neyman Pearson

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 \qquad H_1 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_1$$

$\mathbf{X}$ es un vector discreto (o continuo) bajo $\boldsymbol{\theta}_0$ y $\boldsymbol{\theta}_1$.
Las densidades o f.p.p correspondientes son $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0)$ y $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1)$.

$$L_{10} = \frac{f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1)}{f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0)} \geq k_\alpha$$

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1) > k_\alpha \, f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) \\ \gamma_\alpha & \text{si } f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1) = k_\alpha \, f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) \\ 0 & \text{si } f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1) < k_\alpha \, f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) \end{cases} \tag{1}$$

Teorema de Neyman Pearson

(i) Dado $0 < \alpha \leq 1$ se pueden elegir k_α y γ_α, $0 \leq \gamma_\alpha \leq 1$, tales que el test (1) satisfaga $\beta_\phi(\boldsymbol{\theta}_0) = \alpha$.
Si $\alpha = 0$ el test

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) = 0 \\ 0 & \text{si } f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) > 0 \end{cases} \tag{2}$$

tiene nivel 0.

(ii) Sea ϕ un test de la forma (1) que satisface $\beta_\phi(\boldsymbol{\theta}_0) = \alpha$ para $\alpha > 0$ y de la forma (2) para $\alpha = 0$. Luego ϕ es el más potente de nivel menor o igual que α para

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 \qquad \text{contra} \qquad H_1 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_1$$

Teorema de Neyman Pearson

(iii) Si ϕ^* es un UMP de nivel $\alpha > 0$ para

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 \qquad \text{contra} \qquad H_1 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_1$$

entonces ϕ^* es de la forma

$$\phi^*(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1) > k_\alpha\, f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) \\ \gamma_\alpha(\mathbf{x}) & \text{si } f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1) = k_\alpha\, f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) \\ 0 & \text{si } f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1) < k_\alpha\, f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) \end{cases} \tag{3}$$

excepto en $\mathcal{N}$ tal que $\mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}(\mathcal{N}) = \mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}_1}(\mathcal{N}) = 0$.

(iv) Si ϕ^* es un UMP de nivel 0 para

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 \qquad \text{contra} \qquad H_1 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_1$$

entonces ϕ^* es de la forma (2) excepto en $\mathcal{N}$ tal que $\mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}(\mathcal{N}) = \mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}_1}(\mathcal{N}) = 0$.

i)

1. Si $\alpha = 0$ es fácil ver que el test dado en (2) tiene el nivel deseado.
2. Si $0 < \alpha \leq 1$ extendemos

$$L(\mathbf{X}) = \begin{cases} \dfrac{f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1)}{f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0)} & \text{si } f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) > 0 \\ 1 & \text{si } f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) = 0 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}_0}(\phi(\mathbf{X})) = 1.P_{\boldsymbol{\theta}_0}(L > k_\alpha) + \gamma_\alpha P_{\boldsymbol{\theta}_0}(L = k_\alpha)$$

Analicemos dos situaciones:

a) existe k_0 tal que $P_{\boldsymbol{\theta}_0}(L \leq k_0) = 1 - \alpha$

b) existe k_0 tal que $P_{\boldsymbol{\theta}_0}(L < k_0) \leq 1 - \alpha < P_{\boldsymbol{\theta}_0}(L \leq k_0)$ y $P_{\boldsymbol{\theta}_0}(L = k_0) > 0$

ii) Veamos el caso continuo.

q.v.q si ϕ^* es un test de nivel menor o igual que α, entonces

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}_1}(\phi(\mathbf{X})) \geq \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}_1}(\phi^*(\mathbf{X}))$$

1. Sea $0 < \alpha \leq 1$. Definamos la v.a.

$$U(\mathbf{X}) = (\phi(\mathbf{X})) - \phi^*(\mathbf{X}))(f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1) - k_\alpha f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0))$$

   Probemos que $U(\mathbf{X}) \geq 0$.

2. Sea $\alpha = 0$.
   Como $\mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}_0}(\phi^*(\mathbf{X})) = 0 \Rightarrow \phi^* = 0$ en $\{x : f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) > 0\}$ salvo en un conjunto de medida nula.
   Calculemos

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}_1}(\phi(\mathbf{X})) - \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}_1}(\phi^*(\mathbf{X}))$$

iii)

Sea $0 < \alpha \leq 1$. Como ϕ y ϕ^* son UMP de nivel α

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}_0}(\phi(\mathbf{X})) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}_0}(\phi^*(\mathbf{X}))$$
$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}_1}(\phi(\mathbf{X})) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}_1}(\phi^*(\mathbf{X}))$$

Veamos que $U(\mathbf{X}) = 0$ salvo en un conjunto $\mathcal{N}$, de medida 0 .

Luego, salvo en $\mathcal{N}$

$$(\phi(\mathbf{X})) - \phi^*(\mathbf{X}))(f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1) - k_\alpha f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0)) = 0$$

por lo tanto,

$\phi = \phi^*$ en el conjunto $\{f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1) \neq k_\alpha f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0)\} \cap \mathcal{N}^c$

iv) Sea $0 = \alpha$.

Vimos que $\phi^* = 0$ en $\{x : f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) > 0\}$, salvo en un conjunto $\mathcal{N}_1$ de medida nula.

Luego, $\phi = \phi^*$ en $\{x : f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) > 0\} - \mathcal{N}_1$

¿Qué pasa en $\{x : f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) = 0\}$?

Veamos que

$$0 = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}_1}(\phi(\mathbf{X})) - \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}_1}(\phi^*(\mathbf{X})) = \int_{\{x : f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) = 0\}} (1 - \phi^*(\mathbf{x})) f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1) d\mathbf{x}$$

entonces $\phi^* = 1$ en $\{x : f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) = 0\} \cap \{x : f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1) > 0\}$ salvo un conjunto $\mathcal{N}_2$ de medida nula.

Consideremos
$\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2 \cup (\{x : f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) = 0\} \cap \{x : f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1) = 0\})$

allí $\phi^* = \phi$.

Ejemplos

x	1	2	3	4	5
$p(x,\theta_0)$	0.94	0.01	0.01	0.02	0.02
$p(x,\theta_1)$	0.02	0.04	0.15	0.35	0.44

$$H_0 : \theta = \theta_0 \qquad\qquad H_1 : \theta = \theta_1$$

El test UMP de nivel 0.05 es

$$\phi(X) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad X \geq 3 \\ 0 & \text{si} \quad X < 3 \end{cases} \qquad\qquad \beta_\phi(\theta_1) = 0.94$$

El test UMP de nivel 0.03 es

$$\phi(X) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad X = 5 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad X = 4 \\ 0 & \text{si} \quad X < 4 \end{cases} \qquad\qquad \beta_\phi(\theta_1) = 0.615$$

Ejemplos

x	1	2	3	4	5
$p(x,\theta_0)$	0.94	0.01	0.01	0.02	0.02
$p(x,\theta_1)$	0.02	0.04	0.15	0.35	0.44

x	1	2	3	4	5
L	$\frac{1}{47}$	4	15	17.5	22
$p(x,\theta_0)$	0.94	0.01	0.01	0.02	0.02

Ejemplos

x	1	2	3	4	5
$p(x,\theta_0)$	0.94	0.01	0.01	0.02	0.02
$p(x,\theta_1)$	0.02	0.09	0.09	0.36	0.44

$$H_0 : \theta = \theta_0 \qquad\qquad H_1 : \theta = \theta_1$$

El test UMP de nivel 0.05 es

$$\phi(X) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad L_{10} = \frac{p(x,\theta_1)}{p(x,\theta_0)} > 9 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad L_{10} = 9 \\ 0 & \text{si} \quad L_{10} < 9 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad X \in \{4,5\} \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad X \in \{2,3\} \\ 0 & \text{si} \quad X = 1 \end{cases}$$

Los siguientes test resultan UMP de nivel 0.05

$$\phi_1(X) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad X \in \{3,4,5\} \\ \\ 0 & \text{si} \quad X < 3 \end{cases} \qquad \phi_2(X) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad X \in \{2,4,5\} \\ \\ 0 & \text{si} \quad X \in \{1,3\} \end{cases}$$

Ejemplos

x	1	2	3	4	5
$p(x,\theta_0)$	0.94	0.01	0.01	0.02	0.02
$p(x,\theta_1)$	0.02	0.09	0.09	0.36	0.44

x	1	2	3	4	5
L	$\frac{1}{47}$	9	9	18	22
$p(x,\theta_0)$	0.94	0.01	0.01	0.02	0.02

Caso Normal

- $X_1, \ldots, X_n$ m.a. $N(\mu, \sigma_0^2)$ σ_0^2 conocido,
- $H_0 : \mu = \mu_0$ contra $H_1 : \mu = \mu_1$ con $\mu_1 > \mu_0$
  El test **UMP** de nivel α es

$$\phi_1(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X} - \mu_0)}{\sigma_0} \geq z_\alpha \\ \\ 0 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X} - \mu_0)}{\sigma_0} < z_\alpha \end{cases}$$

- ϕ_1 es **UMP** de nivel α para
  $$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ contra } H_1 : \mu > \mu_0$$
- $\beta_{\phi_1}(\mu) = 1 - \Phi\left(z_\alpha + \sqrt{n}\frac{(\mu_0 - \mu)}{\sigma_0}\right)$

Caso Normal

- $X_1, \ldots, X_n$ m.a. $N(\mu, \sigma_0^2)$ σ_0^2 conocido,
- $H_0 : \mu = \mu_0$ contra $H_1 : \mu = \mu_1$ con $\mu_1 < \mu_0$
  El test **UMP** de nivel α es

$$\phi_2(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X}-\mu_0)}{\sigma_0} \leq -z_\alpha \\ \\ 0 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X}-\mu_0)}{\sigma_0} > -z_\alpha \end{cases}$$

- ϕ_2 es **UMP** de nivel α para

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ contra } H_1 : \mu < \mu_0$$

- $\beta_{\phi_2}(\mu) = \Phi\left(-z_\alpha + \sqrt{n}\frac{(\mu_0 - \mu)}{\sigma_0}\right)$

Caso Normal

- $X_1, \ldots, X_n$ m.a. $N(\mu, \sigma_0^2)$ σ_0^2 conocido,

- ϕ_1 tiene función de potencia creciente
  Es **UMP** de nivel α para
  $$H_0 : \mu \leq \mu_0 \text{ contra } H_1 : \mu > \mu_0$$

- ϕ_2 tiene función de potencia decreciente
  Es **UMP** de nivel α para
  $$H_0 : \mu \geq \mu_0 \text{ contra } H_1 : \mu < \mu_0$$