¿Cuál es la conjunta?

Sean $Z_1, \ldots, Z_p$ variables aleatorias i.i.d. tales $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
Consideremos el vector aleatorio $\mathbf{Z} = (Z_1, \ldots, Z_p)^t$.
¿Cuál es su distribución conjunta?

¿Cuál es la conjunta?

Sean $Z_1, \ldots, Z_p$ variables aleatorias i.i.d. tales $Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)$.
Consideremos el vector aleatorio $\mathbf{Z} = (Z_1, \ldots, Z_p)^t$.
¿Cuál es su distribución conjunta?

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}) &= f(z_1, z_2, \ldots, z_p) = f_1(z_1) f_2(z_2) \ldots f_p(z_p) \\ &= \prod_{i=1}^{p} f_i(z_i) \end{aligned}$$

¿Cuál es la conjunta?

Sean $Z_1, \ldots, Z_p$ variables aleatorias i.i.d. tales $Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)$.
Consideremos el vector aleatorio $\mathbf{Z} = (Z_1, \ldots, Z_p)^t$.
¿Cuál es su distribución conjunta?

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{z}) &= f(z_1, z_2, \ldots, z_p) = f_1(z_1) f_2(z_2) \ldots f_p(z_p) \\
&= \prod_{i=1}^{p} f_i(z_i) \\
&= \prod_{i=1}^{p} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} z_i^2} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} z_i^2}
\end{aligned}$$

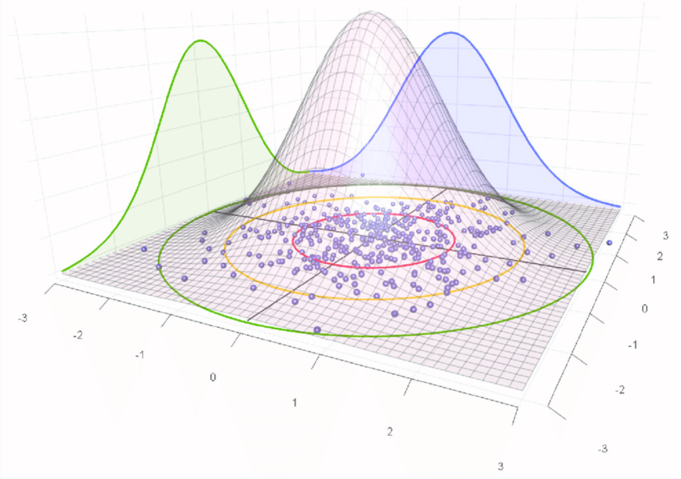
¿Cuál es la conjunta?

Sean $Z_1, \ldots, Z_p$ variables aleatorias i.i.d. tales $Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)$.
Consideremos el vector aleatorio $\mathbf{Z} = (Z_1, \ldots, Z_p)^t$.
¿Cuál es su distribución conjunta?

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{z}) &= f(z_1, z_2, \ldots, z_p) = f_1(z_1) f_2(z_2) \ldots f_p(z_p) \\
&= \prod_{i=1}^{p} f_i(z_i) \\
&= \prod_{i=1}^{p} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} z_i^2} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} z_i^2} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \|\mathbf{z}\|^2} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{z}^t \mathbf{z}}
\end{aligned}
$$

Normal multivariada: $p = 2$

Por ejemplo la función de densidad de una variables $N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ en dimensión 2



¿Cuál es la conjunta?

Sean $X_1, \ldots, X_p$ variables aleatorias i.i.d. tales $X_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$.
$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)^t$ ¿Cuál es su distribución conjunta?

¿Cuál es la conjunta?

Sean $X_1, \ldots, X_p$ variables aleatorias i.i.d. tales $X_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$.
$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)^t$ ¿Cuál es su distribución conjunta?

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) &= \prod_{i=1}^{p} f_i(x_i) = \prod_{i=1}^{p} \frac{1}{(2\pi\sigma_i^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x_i^2}{\sigma_i^2}} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \frac{1}{\prod_{i=1}^{p} \sigma_i} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{\sigma_i^2}}
\end{aligned}
$$

¿Cuál es la conjunta?

Sean $X_1, \ldots, X_p$ variables aleatorias i.i.d. tales $X_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$.
$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)^t$ ¿Cuál es su distribución conjunta?

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) &= \prod_{i=1}^{p} f_i(x_i) = \prod_{i=1}^{p} \frac{1}{(2\pi\sigma_i^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x_i^2}{\sigma_i^2}} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \frac{1}{\prod_{i=1}^{p} \sigma_i} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{\sigma_i^2}} \\
\text{para } \boldsymbol{\Delta} &= \text{diag}(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_p^2) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \frac{1}{\prod_{i=1}^{p} \sigma_i} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^t \boldsymbol{\Delta}^{-1}\mathbf{x}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \frac{1}{|\boldsymbol{\Delta}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^t \boldsymbol{\Delta}^{-1}\mathbf{x}}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Delta})$$

¿Cuál es la conjunta?

$X_1, \ldots, X_p$ variables aleatorias i.i.d. tales $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$.
$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)^t$ ¿Cuál es su distribución conjunta?

¿Cuál es la conjunta?

$X_1, \ldots, X_p$ variables aleatorias i.i.d. tales $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$.
$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)^t$ ¿Cuál es su distribución conjunta?

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= = \prod_{i=1}^{p} \frac{1}{(2\pi\sigma_i^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x_i-\mu_i)^2}{\sigma_i^2}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \frac{1}{\prod_{i=1}^{p}\sigma_i} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu_i)^2}{\sigma_i^2}} \end{aligned}$$

¿Cuál es la conjunta?

$X_1, \ldots, X_p$ variables aleatorias i.i.d. tales $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$.
$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)^t$ ¿Cuál es su distribución conjunta?

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) &= = \prod_{i=1}^{p} \frac{1}{(2\pi\sigma_i^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x_i-\mu_i)^2}{\sigma_i^2}} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \frac{1}{\prod_{i=1}^{p} \sigma_i} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu_i)^2}{\sigma_i^2}} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \frac{1}{|\mathbf{\Delta}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^t \mathbf{\Delta}^{-1}(\mathbf{x}-\mu)}
\end{aligned}
$$

para $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_p)^t$

$$\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Delta})$$

En general: Normal Multivariada

Sean $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$ y $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ **simétrica y definida positiva**

Se dice que $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ si su densidad está dada por

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \frac{1}{|\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}$$

En general: Normal Multivariada

Sean $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$ y $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ **simétrica y definida positiva**

Se dice que $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ si su densidad está dada por

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \frac{1}{|\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}$$

Nota: la densidad conjunta depende de $\mathbf{x}$ a través de

$$D^2 = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$$

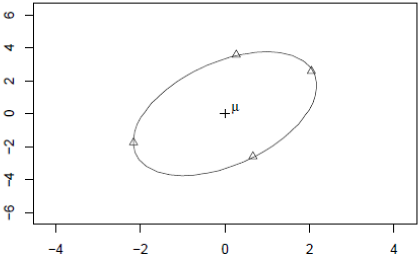
cuadrado de la distancia de Mahalanobis

Distancia de Mahalanobis

- La distancia de Mahalanobis de un punto $\mathbf{x}$ a la media $\boldsymbol{\mu}$ es D siendo

$$D^2 = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$$

- De esta forma, dos puntos tienen la misma distancia de Mahalanobis si están en el mismo elipsoide centrado en $\boldsymbol{\mu}$

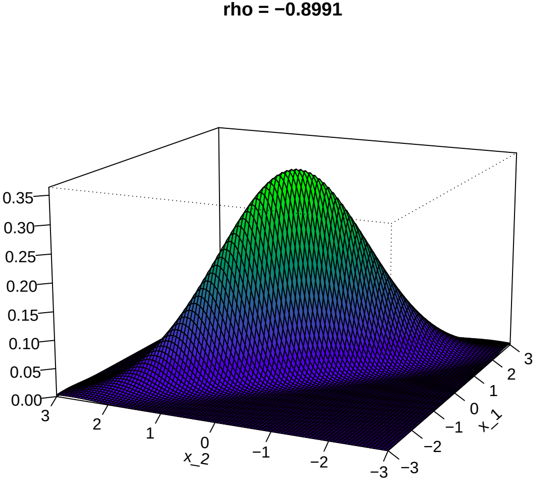


Caso $p = 2$

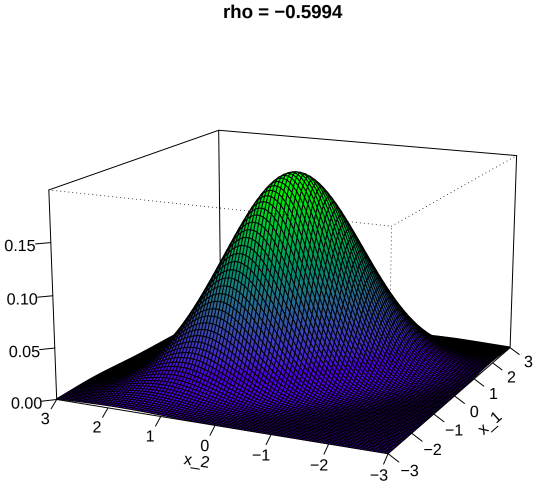
- Sea $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ y $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ definida positiva ($|\rho| \neq 1$)

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) = & \quad \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right.\right. \\
+ & \quad \left.\left.\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right]\right\}
\end{aligned}
$$

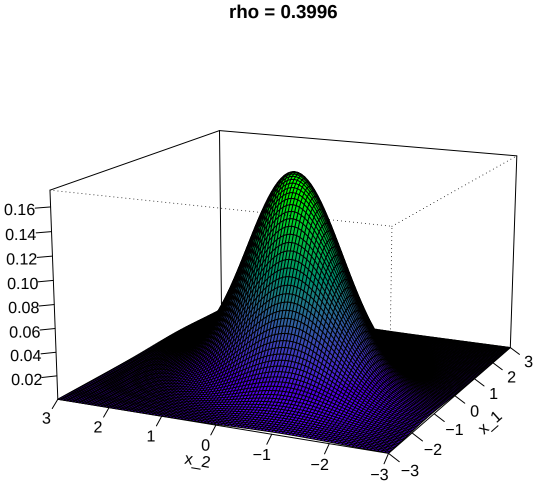
Caso p=2


rho = −0.8991
0.35
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
3
2
1
0
−1
−2
−3
x_2
3
2
1
0
−1
−2
−3
x_1

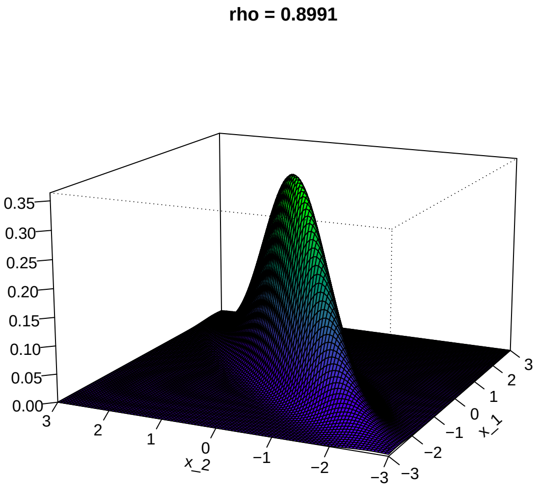
Caso p=2



Caso p=2


rho = 0.3996
0.16
0.14
0.12
0.10
0.08
0.06
0.04
0.02
3
2
1
0
−1
−2
−3
x_2
3
2
1
0
−1
−2
−3
x_1

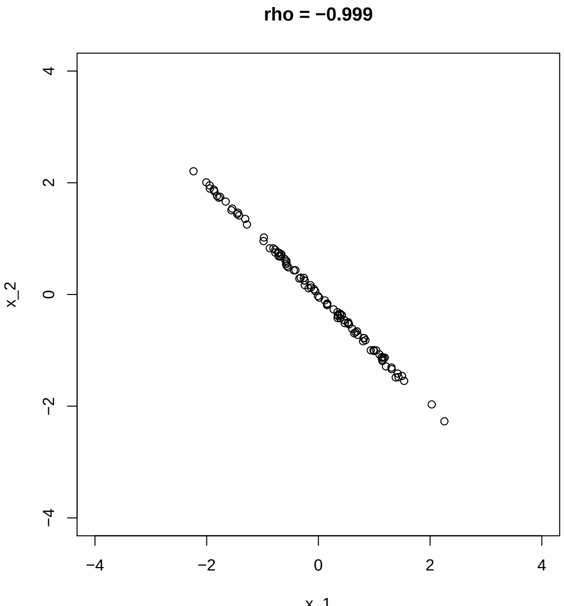
Caso p=2


rho = 0.8991
0.35
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
3
2
1
0
−1
−2
−3
x_2
3
2
1
0
−1
−2
−3
x_1

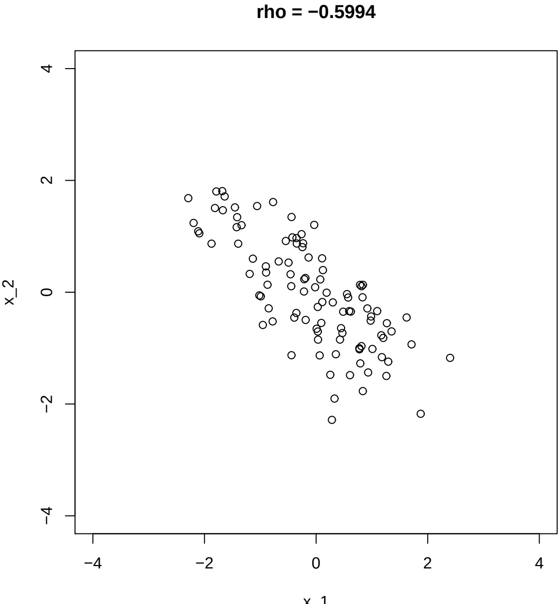
Caso p=2

Ahora vamos a muestrear de estas distribuciones.

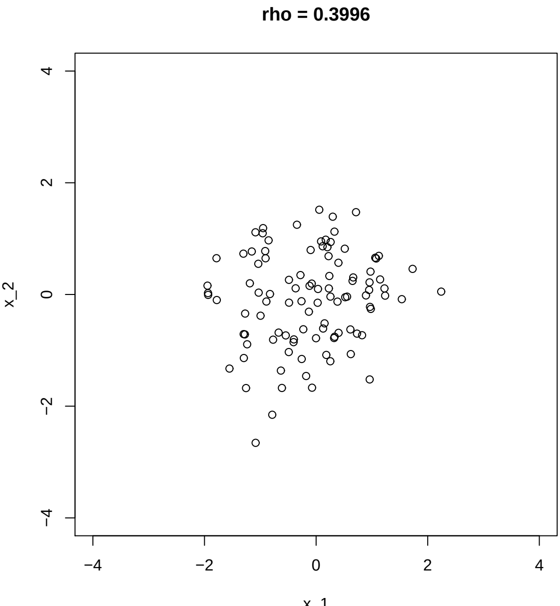
Caso p=2



Caso p=2



Caso p=2



Caso p=2