Funciones Lineales de los Parámetros

En muchas aplicaciones estamos más interesados en estimar funciones lineales de $\boldsymbol{\beta}$ que en estimar $\boldsymbol{\beta}$ en sí mismo:

$$\mathbf{c}'\boldsymbol{\beta} \text{ o } \mathbf{C}\boldsymbol{\beta}$$

Funciones Lineales de los Parámetros

En muchas aplicaciones estamos más interesados en estimar funciones lineales de $\boldsymbol{\beta}$ que en estimar $\boldsymbol{\beta}$ en sí mismo:

$$\mathbf{c}'\boldsymbol{\beta} \text{ o } \mathbf{C}\boldsymbol{\beta}$$

Un caso de especial interés:

En un futuro valor $\mathbf{x}_o$, ¿qué esperamos observar? $\mathbb{E}(y_o) =?$

Funciones Lineales de los Parámetros

En muchas aplicaciones estamos más interesados en estimar funciones lineales de $\boldsymbol{\beta}$ que en estimar $\boldsymbol{\beta}$ en sí mismo:

$$\mathbf{c}'\boldsymbol{\beta} \text{ o } \mathbf{C}\boldsymbol{\beta}$$

Un caso de especial interés:

En un futuro valor $\mathbf{x}_o$, ¿qué esperamos observar? $\mathbb{E}(y_o) =?$

$$\mathbb{E}(y_o) = \mathbf{x}_o'\boldsymbol{\beta} \Rightarrow \widehat{\mathbb{E}(y_o)} = \mathbf{x}_o'\widehat{\boldsymbol{\beta}}$$

Notemos: $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ es insesgado entonces el estimador propuesto sería insesgado de $\mathbb{E}(y_o)$.

Podría haber muchos estimadores de una función lineal $\mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}$ o $\mathbf{C}\boldsymbol{\beta}$, nos enfocaremos en los estimadores lineales: funciones lineales de $y_1, \ldots, y_n$.

Funciones Lineales de los Parámetros

En muchas aplicaciones estamos más interesados en estimar funciones lineales de $\boldsymbol{\beta}$ que en estimar $\boldsymbol{\beta}$ en sí mismo:

$$\mathbf{c}'\boldsymbol{\beta} \text{ o } \mathbf{C}\boldsymbol{\beta}$$

Un caso de especial interés:

En un futuro valor $\mathbf{x}_o$, ¿qué esperamos observar? $\mathbb{E}(y_o) = ?$

$$\mathbb{E}(y_o) = \mathbf{x}_o'\boldsymbol{\beta} \Rightarrow \widehat{\mathbb{E}(y_o)} = \mathbf{x}_o'\widehat{\boldsymbol{\beta}}$$

Notemos: $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ es insesgado entonces el estimador propuesto sería insesgado de $\mathbb{E}(y_o)$.

Podría haber muchos estimadores de una función lineal $\mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}$ o $\mathbf{C}\boldsymbol{\beta}$, nos enfocaremos en los estimadores lineales: funciones lineales de $y_1, \ldots, y_n$.

Primero veremos cuando una función paramétrica es estimable.

Funciones Estimables

Estimadores Lineales Insesgados

Definición: Una función paramétrica ψ se dice que es una función lineal de los parámetros $\{\beta_1, \ldots, \beta_p\}$ si existen $\{c_1, \ldots, c_p\}$ constantes conocidas tal que

$$\psi = \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta} = \sum_{j=1}^{p} c_j \beta_j$$

donde $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_p)'$.

Funciones Estimables

Estimadores Lineales Insesgados

Definición: Una función paramétrica ψ se dice que es una función lineal de los parámetros $\{\beta_1, \ldots, \beta_p\}$ si existen $\{c_1, \ldots, c_p\}$ constantes conocidas tal que

$$\psi = \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta} = \sum_{j=1}^{p} c_j \beta_j$$

donde $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_p)'$.

Definición: Decimos que una función paramétrica $\psi = \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}$ es estimable si tiene un estimador lineal (en $\mathbf{Y}$) insesgado, es decir si existe $\mathbf{a} \in \Re^n$ tal que

$$E(\mathbf{a}'\mathbf{Y}) = \psi = \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta} \quad \forall \boldsymbol{\beta} \in \Re^p$$

¿Hay funciones que no son estimables?

Funciones Estimables: Caracterización

El siguiente resultado caracteriza las funciones paramétricas estimables suponiendo el modelo

$$\Omega : E(\mathbf{Y}) = \mathbf{X}\beta \quad \mathbf{\Sigma_Y} = \sigma^2\mathbf{I}$$

Teorema: La función paramétrica $\psi = \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}$ es estimable si y sólo si $\mathbf{c}$ es una combinación lineal de las filas de $\mathbf{X}$, o sea si existe $\mathbf{a} \in \Re^n$ tal que

$$\mathbf{c}' = \mathbf{a}'\mathbf{X}$$

Funciones Estimables: Caracterización

El siguiente resultado caracteriza las funciones paramétricas estimables suponiendo el modelo

$$\Omega : E(\mathbf{Y}) = \mathbf{X}\beta \quad \mathbf{\Sigma_Y} = \sigma^2\mathbf{I}$$

Teorema: La función paramétrica $\psi = \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}$ es estimable si y sólo si $\mathbf{c}$ es una combinación lineal de las filas de $\mathbf{X}$, o sea si existe $\mathbf{a} \in \Re^n$ tal que

$$\mathbf{c}' = \mathbf{a}'\mathbf{X}$$

Notemos que si el $rg(\mathbf{X}) = p$, toda función paramétrica $\psi = \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}$ es estimable .

Mejor Estimador Lineal Insesgado (BLUE)

Lema: Supongamos que vale el modelo Ω. Sean $\psi = \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}$ una función estimable y $\mathcal{V}_r$ el espacio generado por las columnas de $\mathbf{X}$ $(r = rg(\mathbf{X}) \leq p)$.

Luego, existe un único estimador lineal insesgado de ψ, digamos $\mathbf{a}^{*'}\mathbf{Y}$ con $\mathbf{a}^* \in \mathcal{V}_r$. Más aún, si $\mathbf{a}'\mathbf{Y}$ es un estimador insesgado de ψ, $\mathbf{a}^*$ es la proyección ortogonal de $\mathbf{a}$ sobre $\mathcal{V}_r$.

Mejor Estimador Lineal Insesgado (BLUE)

Lema: Supongamos que vale el modelo Ω. Sean $\psi = \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}$ una función estimable y $\mathcal{V}_r$ el espacio generado por las columnas de $\mathbf{X}$ $(r = rg(\mathbf{X}) \leq p)$.

Luego, existe un único estimador lineal insesgado de ψ, digamos $\mathbf{a}^{*'}\mathbf{Y}$ con $\mathbf{a}^* \in \mathcal{V}_r$. Más aún, si $\mathbf{a}'\mathbf{Y}$ es un estimador insesgado de ψ, $\mathbf{a}^*$ es la proyección ortogonal de $\mathbf{a}$ sobre $\mathcal{V}_r$.

Teorema de Gauss–Markov:
Supongamos que vale el modelo $\Omega : E(\mathbf{Y}) = \mathbf{X}\beta \quad \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Y}} = \sigma^2\mathbf{I}$.

Toda función estimable $\psi = \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}$ tiene un único estimador $\widehat{\psi}$ lineal insesgado de míinima varianza (BLUE). Este estimador $\widehat{\psi}$ se puede obtener reemplazando a $\boldsymbol{\beta}$ en $\mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}$ por $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$, el estimador de mínimos cuadrados.