Estadística (M) - Segundo cuatrimestre 2018

Clase Práctica 06/09

Repaso express de convergencias

1. Convergencia en probabilidad.
   $X_n \xrightarrow{p} X$ si $P(|X_n - X| > \epsilon) \to 0$ para todo $\epsilon > 0$
2. Convergencia casi segura.
   $X_n \xrightarrow{cs} X$ si $P(X_n(\omega) \to X(\omega)) = 1$
3. Si f es continua y $X_n \to X$ en probabilidad o casi seguramente,
   entonces $f(X_n) \to f(X)$ en probabilidad o casi seguramente respectivamente.
4. Si $X_n \xrightarrow{p} X$ y $\sum_n P(|X_n - X| > \epsilon) < \infty$ para todo $\epsilon > 0$
   Entonces $X_n \xrightarrow{cs} X$

Consistencia

Una propriedad que uno desea tener en un estimador es que sea mejor si la muestra que uno dispone es grande. Esto quiere decir que si el tamaño de mi muestra n aumenta, mi estimador $\hat{\theta}$ mejora. Mejora en el sentido que converge a mi parámetro real θ.

Definición 1. *Sea X_1, ..., X_n variables i.i.d. cuya distribución depende un parámetro desconocido θ. Diremos que un estimador $\hat{\theta}$ para θ es*

- *Debilmente consistente si $\hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n) \xrightarrow{p} \theta$ cuando $n \to \infty$*
- *Fuertemente consistente si $\hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n) \xrightarrow{cs} \theta$ cuando $n \to \infty$*

Problema .. Sean X_1, ... X_n i.i.d. X_1 tiene función de densidad dada por

$$f_X(x) = \theta x^{\theta-1} 1_{[0,1]}(x)$$

con $\theta > 0$.

Hallar los estimadores de momentos y máxima verosimilitud para θ y ver que son fuertemente consistentes.

Empezemos calculando el estimador de momentos. Calculamos la esperanza de X_1.

$$\mathrm{E}(X_1) = \int_0^\theta x\theta x^{\theta-1} \mathrm{d}x = \theta \int_0^\theta x^\theta \mathrm{d}x = \left.\frac{\theta x^{\theta+1}}{\theta+1}\right|_0^\theta = \frac{\theta}{\theta+1}$$

De donde podemos despejar

$$\hat{\theta}_{mo} = \frac{\overline{X}}{1 - \overline{X}}$$

¿Es fuertemente consistente? Necesitamos ver que $\hat{\theta}_{mo} \stackrel{cs}{\to} \theta$. Nuestra mejor arma para este caso es la ley de los grandes números que nos garantiza que $\overline{X} \stackrel{cs}{\to} X$. Por lo tanto, podemos tomar la función
$$g(x) = \frac{x}{1-x}$$
que es continua en el $(0,1)$ y usando la propiedad 3, obtenemos
$$\hat{\theta}_{mo} = g(\overline{X}) \stackrel{cs}{\to} g\left(\frac{\theta}{\theta+1}\right) = \theta$$

Por lo tanto, el estimador de momentos para θ es fuertemente consistente.

Hacemos ahora el estimador de máxima verosimilitud. La función de likelihood es
$$\mathcal{L}(\theta, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \theta x_i^{\theta-1} 1_{[0,1]}(x_i)$$
Tomando logaritmo, asumiendo que todos los valores x_i están adentro del intervalo $[0,1]$, la función de loglikelihood nos queda
$$\ell(\theta, x_1, \dots, x_n) = n \log\theta + (\theta - 1)\sum_{i=1}^{n} \log x_i$$

Buscamos el máximo en θ.
$$\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}\theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \log x_i$$
De donde podemos despejar
$$\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}\theta} = 0 \Leftrightarrow \theta = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\log x_i}$$

Es máximo? Si pues si volvemos a derivar en θ, queda
$$\frac{\mathrm{d}^2\ell}{\mathrm{d}\theta^2} = -\frac{n}{\theta^2} < 0$$
Por lo tanto el estimador de máxima verosimilitud es
$$\hat{\theta}_{MV} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\log X_i}$$

Veamos consistencia. Me gustaria volver a usar la ley de los grandes números pero no aparece el promedio de los X_i. Pero si aparece el promedio de $\log X_i$.

Calculemos la esperanza de $\log X_i$. Hay dos maneras.

1. Calcular directamente $\mathrm{E}(\log X) = \int_0^\theta x \frac{2x}{\theta} \mathrm{d}x$

2. Calcular la distribucion de $\log X$ y luego calcular su esperanza.

Optamos por la opción 2. Vamos a calcular la distribución de $-\log X$ pues nos dará una distribución conocida. Escribimos

$$\mathrm{P}(-\log X < t) = \mathrm{P}(\log X > -t) = \mathrm{P}(X > e^{-t}) = \int_{e^{-t}}^{1} \theta x^{\theta-1} \mathrm{d}x = x^{\theta}\Big|_{e^{-t}}^{1} = 1 - e^{-t\theta}.$$

Si uno lo mira con cuidado, se dará cuenta que es la acumulada de una exponencial de parámetro θ. Por lo tanto su esperanza es conocida y da $1/\theta$.

Volvemos a nuestro estimador.

$$\hat{\theta}_{MV} = \frac{n}{-\sum \log X_i} = \frac{1}{\overline{-\log X}} \longrightarrow \frac{1}{\frac{1}{\theta}} = \theta$$

Donde la convergencia es casi segura y se da por la ley de los grandes números y la propiedad 3.

Problema .. Sean X_1, ... X_n i.i.d. X_1 tiene función de densidad dada por

$$f_X(x) = \frac{2x}{\theta^2} 1_{[0,\theta)}(x)$$

Hallar los estimadores de momentos y máxima verosimilitud para θ y ver que son consistentes.

$$\mathrm{E}(X_1) = \int_0^{\theta} x \frac{2x}{\theta} \mathrm{d}x = \int_0^{\theta} \frac{2x^2}{\theta^2} \mathrm{d}x = \frac{2}{\theta^2 3} x^3 \Big|_0^{\theta} = \frac{2}{3}\theta$$

De donde despejamos

$$\hat{\theta}_{MO} = \frac{3}{2}\overline{X}$$

Que es consistente pues por la ley de los grandes números, $\overline{X} \stackrel{cs}{\to} \frac{2}{3}\theta$. Luego

$$\hat{\theta}_{MO} \longrightarrow \theta \text{ casi seguramente}$$

Seguimos con el estimador de máxima verosimilitud.

$$\mathcal{L}(\theta, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{\theta^2} 1_{[0,\theta)}(x_i) = \frac{2^n}{\theta^{2n}} (\prod x_i) 1_{\max x_i < \theta}$$

. Como la parte que no depende de la indicadora es decreciente en θ, queremos que θ sea lo más chico posible. Sin embargo, lo más chico que puede ser es el máximo entre los x_i pues si es más chico que eso la función pasa a valer cero. Por lo tanto

$$\hat{\theta}_{MV} = \max X_i$$

Veamos ahora consistencia. No vamos a poder usar la ley de los grandes números como veniamos haciendo. Tenemos que calcular su distribución a mano. Recordemos el truco para calcular la distribución del máximo de variables i.i.d.

$$\mathrm{P}(\max X_i < t) = \mathrm{P}(X_i < t \text{ para todo } i) = \mathrm{P}(X_1 < t)^n$$

Donde en la última igualdad uso que son independientes e identicamente distribuidas.

Calculamos ahora $\mathrm{P}(X_1 < t)$

$$\mathrm{P}(X_1 < t) = \int_0^t \frac{2x}{\theta^2}\mathrm{d}x = \frac{t^2}{\theta^2} \text{ si } t < \theta$$

Por lo tanto la función de distribución acumulada del máximo de las X_i es

$$F_{\max X_i}(t) = \frac{t^{2n}}{\theta^{2n}} 1_{t<\theta}$$

Vamos a usar la propiedad 4 para ver que el estimador de máxima verosimilitud es fuertemente consistente. Queremos ver que

$$\mathrm{P}(|\hat{\theta}_{MV} - \theta| > \epsilon)$$

suma para todo $\epsilon > 0$. Pero usando que el máximo de las X_i siempre es más chico que θ, podemos escribir que es probabilidad es en realidad

$$\mathrm{P}(-\max X_i + \theta > \epsilon) = \mathrm{P}(\max X_i < \theta - \epsilon) = (\frac{\theta - \epsilon}{\theta})^{2n} < (1 - \delta)^n$$

para algún $0 < \delta < 1$. Luego esa probabilidad suma en n y por la propiedad 4,

$$\hat{\theta}_{MV} \xrightarrow{cs} \theta.$$