

1. Modelo para los errores de medición

Muchas veces el valor de una constante física no se conoce con precisión, pero puede determinarse por procedimientos experimentales que pueden llevarse a cabo en un laboratorio. Estos procedimientos, en principio aparentemente simples como pesar o medir un objeto, determinar un voltaje o medir un intervalo de tiempo, se vuelven bastante complicados de tratar matemáticamente cuando se tienen en cuenta todos los detalles y las posibles fuentes de error.

En general, a los errores se los distingue entre aleatorios y sistemáticos. Las variaciones en las respuestas o mediciones realizadas bajo las mismas condiciones experimentales es lo que se conoce por errores aleatorios. Se trata de fluctuaciones incontrolables que se modelan por el azar. Nos contentaremos con dar una medida de su variabilidad (la varianza o el desvío estándar). Al mismo tiempo, puede haber errores que tengan el mismo efecto en todas las mediciones (por ejemplo, sobreestimando el resultado): el equipo puede estar mal calibrado de modo de arrojar sistemáticamente resultados más altos de los que realmente debería, o puede haber errores asociados con la forma en que se realizan las mediciones. Si el verdadero valor de la cantidad que quiere ser medida se denota por μ_0 , la medida realizada, X , suele modelarse como

$$X = \mu_0 + \beta + \varepsilon$$

donde β es el error sistemático, y ε es el componente aleatorio del error; ε es una variable aleatoria con $E(\varepsilon) = 0$ y $Var(\varepsilon) = \sigma^2$. Observemos que tanto μ_0 como β son valores fijos y desconocidos. Entonces tenemos

$$E(X) = \mu_0 + \beta$$

y

$$Var(X) = \sigma^2.$$

A β se lo suele llamar **sesgo** del procedimiento de medición. Las dos componentes que afectan el tamaño del error son el sesgo β y el tamaño de la varianza, σ^2 . Una medición perfecta tendría $\beta = 0$ y $\sigma^2 = 0$.

1.1. Error aleatorio y error sistemático

Para ilustrar la diferencia entre error aleatorio y sistemático, consideremos un ejemplo de Taylor [1997].

Supongamos primero que tomamos el tiempo que le toma dar una vuelta completa a un plato giratorio que gira constantemente. Una fuente de error será nuestro tiempo de reacción para iniciar y detener el reloj. Si nuestro tiempo de reacción fuera siempre exactamente el mismo, estas dos demoras se cancelarían entre sí. En la práctica, sin

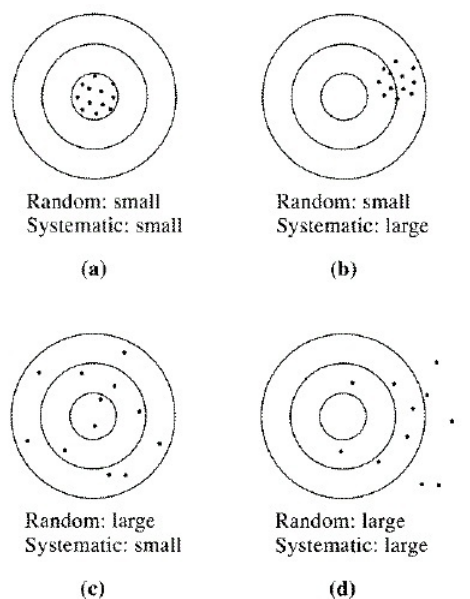
embargo, nuestro tiempo de reacción variará. Podemos retrasarnos en comenzar, y así subestimar el tiempo de una revolución, o podemos demorarnos en detener el reloj, y así sobreestimar el tiempo. Como ambas posibilidades son igualmente probables, el signo del efecto es aleatorio. Si repetimos la medición varias veces, a veces sobreestimaremos y otras veces subestimaremos el tiempo real. Por lo tanto, nuestro tiempo de reacción variable se manifestará en nuestro experimento como una variación de las respuestas encontradas. Al analizar los resultados estadísticamente, podemos obtener una estimación muy confiable de la magnitud de este tipo de error.

Por otro lado, si nuestro cronómetro estuviera funcionando mal, corriendo constantemente de forma lenta, entonces todos nuestros tiempos serán subestimados, y ninguna medición (con el mismo reloj) revelará esta fuente de error, por más que lo repitamos muchas veces. Este tipo de error es el que llamamos sistemático, porque siempre empuja nuestro resultado en la misma dirección (subestimamos si el reloj va lento, sobreestimaremos si el reloj va acelerado). Los errores sistemáticos no pueden ser descubiertos por el tipo de análisis estadístico que discutiremos en estas notas.

Como segundo ejemplo, pensemos en medir una longitud bien definida con una regla. Una fuente de incerteza será la necesidad que tendremos de interpolar entre dos marcas consecutivas de la regla, y esta incertidumbre será seguramente aleatoria (cuando interpolemos tendremos igual probabilidad de sobreestimar como de subestimar). Pero también existe la posibilidad de que la regla esté distorsionada, y esta fuente de incerteza será sistemática (si la regla se ha encogido, siempre sobreestimaremos, si la regla se ha estirado, subestimaremos siempre).

Casi todas las mediciones experimentales están sujetas a ambos tipos de errores (aleatorios y sistemáticos). La mala calibración de los instrumentos suele ser la fuente principal de los errores sistemáticos. Los aleatorios se deben a la acumulación de pequeños errores del observador, pequeñas variaciones de los instrumentos, condiciones climáticas distintas, problemas de definición y muchas otras. Una manera de entender más claramente la diferencia entre ambos es mirando la Figura 1. Aquí el experimento es el tiro de flechas al blanco. El centro del blanco representa a μ_0 , la cantidad que queremos conocer. Los tiros al blanco representan las mediciones, intentos de dar con el centro del blanco, o sea, mediciones para conocer a μ_0 . La falta de error sistemático consiste en que los tiros se ubiquen cerca del centro. Los errores aleatorios son causados por cualquier motivo que haga que los tiros se desvíen hacia distintos lados: las condiciones atmosféricas, la mano temblorosa del tirador. Los errores sistemáticos se producen, por ejemplo, si el tirador tiene algún problema de visión, o el arco tiene algún defecto que empuje a los tiros consistentemente fuera del centro. Una cuestión interesante de esta figura es que se debe conocer la posición del blanco (y su centro) para saber si estamos en presencia de errores sistemáticos. La Figura 2 representa el mismo experimento de la Figura 1 pero sin el blanco superpuesto a las observaciones. En la analogía con las mediciones, donde medimos una cantidad porque no la conocemos, la Figura 2 representa un escenario más realista en las aplicaciones. Observemos que en este caso es imposible saber si se está frente a errores sistemáticos solamente examinando la distribución de las mediciones realizadas (no conocemos la ubicación del blanco).

Figura 1: Errores aleatorios y sistemáticos en la práctica de tiro al blanco. (a) Como todos los tiros impactaron muy cerca uno de otro, podemos decir que los errores aleatorios son pequeños. Como la distribución de los tiros está centrada en el centro del blanco, deducimos que los errores sistemáticos son pequeños. (b) Los errores aleatorios son pequeños, pero los errores sistemáticos no: los tiros se ubican sistemáticamente lejos del centro, hacia la derecha de él. (c) En este caso, los errores aleatorios son grandes (impactos muy separados entre sí) pero no sistemáticamente desviados. (d) Ambos errores son grandes. Fuente: Taylor [1997]



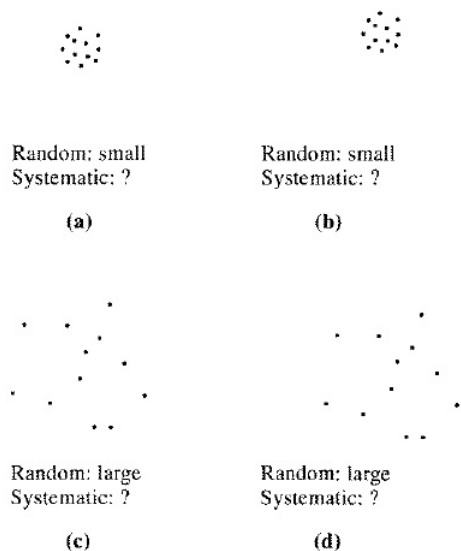
1.2. Estimación y Teorema Central del Límite

Como dijimos, queremos medir una determinada cantidad desconocida μ_0 . Para ello, realizaremos una cantidad n de mediciones de ella. Antes de saber el valor que finalmente tomen dichas mediciones, las podemos pensar como variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d.), que notaremos con letras mayúsculas X_1, X_2, \dots, X_n . Si el error sistemático de nuestras mediciones es cero, podemos asumir el siguiente modelo de mediciones repetidas

$$X_i = \mu_0 + \varepsilon_i, \quad 1 \leq i \leq n \quad (1)$$

donde ε_i es el componente aleatorio del error. Es decir, ε_i son variables aleatorias que asumimos que cumplen $E(\varepsilon_i) = 0$ y llamamos $\sigma^2 = Var(\varepsilon_i)$. Aquí μ_0 y σ^2 son parámetros del modelo (es decir, números fijos) y $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ son variables aleatorias. Por supuesto, tanto μ_0 como ε_i son no observables (sin conocer a una de ellas no podemos despejar

Figura 2: El mismo experimento que en la Figura 1, graficado sin los blancos. La situación se asemeja a la experimental, en la que no se conoce el valor verdadero de la cantidad a medir. En tal caso es posible identificar la magnitud de los errores aleatorios, aunque no la de los sistemáticos. Fuente: Taylor [1997]



la otra) ni lo es σ^2 . Si a este modelo le agregamos el supuesto de que los errores ε_i tengan distribución normal, (1) se denomina *modelo de Gauss sin sesgo*. De la normalidad de los errores se deduce la normalidad de las mediciones. ¿Cómo sabemos que las ε_i tienen distribución normal? Podríamos saberlo o bien por experiencias previas en el área en la que trabajamos, o bien porque existan razones teóricas que nos aseguren dicha distribución. Por supuesto, no siempre podemos asumir que nuestras mediciones tienen distribución normal.

Por la Ley de los Grandes Números, sabemos que $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, el promedio de las n mediciones (o media muestral) converge en probabilidad a μ_0 , y por lo tanto, tenemos un estimador consistente de $E(X_i)$: $\hat{\mu} = \bar{X}_n$. Sabemos que, para todo i ,

$$E(X_i) = \mu_0$$

$$Var(X_i) = \sigma^2.$$

y también

$$E(\bar{X}_n) = \mu_0 \tag{2}$$

$$Var(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}, \tag{3}$$

por lo que \bar{X}_n es una variable aleatoria centrada alrededor del mismo valor que cada medición individual, pero sujeta a una varianza mucho más pequeña. En el caso en el que hemos descartado la presencia de errores sistemáticos, el uso del valor promedio obtenido en n mediciones como una estimación del valor μ_0 desconocido representa una mejora respecto de la utilización de una sola medición precisamente porque es una variable aleatoria centrada en el mismo μ_0 que tendrá menor variabilidad. Podemos apreciar este hecho si usamos los resultados teóricos vistos.

La Ley de los Grandes Números nos dice que \bar{X}_n converge a μ_0 (en probabilidad), así que podemos esperar que \bar{X}_n esté cerca de μ_0 si n es grande. La desigualdad de Chebyshev nos permite acotar la probabilidad de cometer un error de un tamaño determinado al estimar a μ_0 por \bar{X}_n , ya sea que n sea pequeño o grande, pero es el Teorema Central del Límite (TCL) el que proporciona una aproximación mucho más concreta a las probabilidades de error que cometemos en el caso en el que n sea suficientemente grande. Por supuesto, si las mediciones X_i fueran normales, las probabilidades involucradas en el cálculo del TCL serían exactas en vez de aproximadas. Supongamos que queremos encontrar $P(|\bar{X}_n - \mu_0| < c)$ para alguna constante c , es decir, la probabilidad de cometer un error al estimar el valor de μ_0 por \bar{X}_n que no sobrepase una cota dada por c . Usaremos el TCL para aproximar esta probabilidad. Primero estandarizamos, usando (2) y (3):

$$\begin{aligned} P(|\bar{X}_n - \mu_0| < c) &= P(-c < \bar{X}_n - \mu_0 < c) \\ &= P\left(\frac{-c}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{c}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\ &\approx \Phi\left(\frac{c}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{-c}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 2\Phi\left(\frac{c\sqrt{n}}{\sigma}\right) - 1 \end{aligned}$$

donde la aproximación recién realizada es válida si n es suficientemente grande.

Por ejemplo, si hacemos $n = 36$ mediciones con $\sigma = 1$, la probabilidad de que el promedio muestral difiera de μ_0 en menos de 0.5 es aproximadamente

$$P(|\bar{X}_n - \mu_0| < 0.5) \approx \Phi\left(\frac{0.5}{1/6}\right) - \Phi\left(\frac{-0.5}{1/6}\right) = 2\Phi(3) - 1 = 2 \cdot 0,99865 - 1 = 0,9973.$$

Observemos que en este caso el hecho de repetir las mediciones una cantidad de veces nos permite afirmar dos cosas:

- la primera es mejorar la estimación de μ_0 , reduciendo el error con el que lo aproximamos
- la segunda, utilizar la distribución normal (aunque sea de forma aproximada) para calcular probabilidades que involucren al error de estimación involucrado. Observemos que esta normalidad aproximada se consigue *aún cuando no conocemos la distribución original de las mediciones* (esa es la fuerza del TCL).

Este tipo de razonamiento se puede dar vuelta. Es decir, dados c y δ , se pueden encontrar n suficientemente grande, tal que

$$P(|\bar{X}_n - \mu_0| < c) \geq \delta.$$

O sea, encontrar el número de veces que tengo que repetir el experimento si quiero tener una probabilidad mayor o igual que δ de cometer a lo sumo un error de $\pm c$ unidades cuando estimo a la cantidad μ_0 con el valor \bar{X}_n .

1.3. Muestra aleatoria, realizaciones y notación

Antes de seguir, enfatizamos en esta sección, la manera en la que la estadística modela las mediciones, haciendo un breve hincapié en la notación. Lo que escribimos acá es válido tanto para el modelo de Gauss, como para mediciones que se realizan en un contexto más general.

Antes de realizar las mediciones, pensamos que cada una de ellas es una variable aleatoria con distribución F que depende de la cantidad desconocida (o parámetro) μ_0 . Como todas se obtienen como producto de repeticiones independientes de un mismo experimento aleatorio (medir una cierta cantidad), llamando

$X_i =$ resultado de la i ésima repetición del experimento,

asumiremos que X_1, X_2, \dots, X_n son variables aleatorias independientes, todas con la misma distribución que, a su vez, depende de μ_0 . Escribimos (con letras mayúsculas) X_1, X_2, \dots, X_n independientes idénticamente distribuidos con distribución $F(\mu_0)$, o bien, $X_1, X_2, \dots, X_n \sim F(\mu_0)$ i.i.d., donde F denotará una distribución conocida o desconocida. Esto da lugar a la siguiente definición

Definición 1 Diremos que X_1, X_2, \dots, X_n es una **muestra aleatoria** si X_1, X_2, \dots, X_n son variables aleatorias i.i.d.

Una vez que hacemos las mediciones obtenemos los valores x_1, x_2, \dots, x_n . Notar que usamos las letras minúsculas para indicar los valores obtenidos para las variables X_1, X_2, \dots, X_n . A x_1, x_2, \dots, x_n se le suele llamar la “*realización*” de la muestra aleatoria: se han convertido en números fijos (ya no tienen azar involucrado).

2. Propagación de errores

En muchas aplicaciones, la cantidad a ser determinada, μ_0 , no se mide directamente. En cambio, se miden otras cantidades de las que depende μ_0 . Por ejemplo, cuando quiere conocerse el área de un círculo, midiendo su radio o se quiere medir la aceleración de la gravedad midiendo el tiempo que demora en caer una piedra desde una cierta altura. Asumimos que para las cantidades medidas (el radio del círculo, el tiempo o la altura) se dispone de un mecanismo cuya variabilidad es conocida. La propagación de errores se ocupa de calcular (o aproximar) la precisión con la que puede reportarse este resultado final. Surge de combinar las propiedades de la varianza con el teorema de Taylor.

2.1. Funciones de un parámetro

A partir de una muestra $X_1, \dots, X_n \sim F(\mu_0)$, asumimos que tenemos un estimador consistente de μ_0 basado en la muestra, $\hat{\mu}_n$, del cual podemos calcular su esperanza y varianza. $\hat{\mu}_n$ es en realidad una forma abreviada de escribirlo. En realidad es $\hat{\mu}_n(X_1, \dots, X_n)$. Lo notaremos indistintamente $\hat{\mu}_n$ o $\hat{\mu}$. Sin embargo, el parámetro que nos interesa estimar no es μ_0 sino θ_0 , una función conocida de él:

$$\theta_0 = g(\mu_0).$$

Un estimador de θ será

$$\hat{\theta}_n = g(\hat{\mu}_n).$$

El hecho de que $\hat{\mu}_n$ sea un estimador consistente de μ_0 significa que

$$\hat{\mu}_n \xrightarrow{P} \mu_0 \text{ en probabilidad, cuando } n \rightarrow +\infty.$$

Si la función g es continua, hay resultados teóricos que garantizan que

$$\hat{\theta}_n = g(\hat{\mu}_n) \xrightarrow{P} g(\mu_0) = \theta_0, \text{ en probabilidad, cuando } n \rightarrow +\infty,$$

por lo que $\hat{\theta}_n$ será un estimador consistente de θ_0 . La pregunta que nos queda contestar es qué podemos decir del desvío estándar de $\hat{\theta}_n$. Antes veamos un ejemplo.

Ejemplo 2 (Área de un círculo).

Queremos estimar θ_0 , el área de un círculo. Para ello, mediremos n veces su diámetro. Por supuesto, estas mediciones están sujetas a un error. Sean

$$\begin{aligned} X_i &= \text{iésima medición del diámetro, } 1 \leq i \leq n \\ \mu_0 &= E(X_i) = \text{diámetro esperado (o verdadero) del círculo.} \end{aligned}$$

El parámetro de interés es

$$\begin{aligned} \theta_0 &= g(\mu_0) \text{ con } g(\mu_0) = \pi \left(\frac{\mu_0}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} \mu_0^2. \\ \theta_0 &= \text{área (verdadera) del círculo} \end{aligned}$$

Un estimador consistente de μ es \bar{X}_n , es decir, $\hat{\mu}_n = \bar{X}_n$. Luego para estimar a θ proponemos tomar

$$\hat{\theta}_n = g(\hat{\mu}_n) = \frac{\pi}{4} \hat{\mu}_n^2. \quad (4)$$

Nos interesa calcular el desvío estándar de $\hat{\theta}_n$.

Volvemos al problema de calcular $Var(g(\hat{\mu}))$ en términos de $Var(\hat{\mu})$. Si la función g fuera lineal, podríamos resolver el problema fácilmente: asumamos $g(\hat{\mu}_n) = a\hat{\mu}_n + b$, con a y b constantes, entonces

$$Var(g(\hat{\mu}_n)) = Var(a\hat{\mu}_n + b) = a^2 Var(\hat{\mu}_n).$$

Sin embargo, cuando la función g no es lineal, para poder calcular $Var(g(\hat{\mu}))$ no nos basta con conocer la $Var(\hat{\mu})$ sino que debemos conocer la distribución de $\hat{\mu}$ (o su función de densidad), ya que, en el caso en que $\hat{\mu}$ sea una variable aleatoria continua tenemos

$$Var(g(\hat{\mu})) = E\left([g(\hat{\mu}) - E(g(\hat{\mu}))]^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} [g(t) - E(g(\hat{\mu}))]^2 f_{\hat{\mu}}(t) dt.$$

Esta información no suele estar disponible en el trabajo aplicado. Entonces trataremos de *estimar a la* $Var(g(\hat{\mu}))$. Para ello, usamos una aproximación lineal. En estadística este método se conoce como *propagación de errores*, o también, *método delta*. Ver Wasserman [2013] para una descripción bien técnica. Para linealizar hacemos el desarrollo de Taylor de la función g alrededor de μ_0 , obteniendo

$$\hat{\theta}_n = g(\hat{\mu}_n) \approx g(\mu_0) + g'(\mu_0)(\hat{\mu}_n - \mu_0), \quad (5)$$

donde estamos despreciando el término del error. Tomando varianza en (5) tenemos

$$\begin{aligned} Var(\hat{\theta}_n) &= Var(g(\hat{\mu}_n)) \\ &\approx Var[g(\mu_0) + g'(\mu_0)(\hat{\mu}_n - \mu_0)] \\ &= Var[g'(\mu_0)(\hat{\mu}_n - \mu_0)] = [g'(\mu_0)]^2 Var(\hat{\mu}_n - \mu_0) \\ &= [g'(\mu_0)]^2 Var(\hat{\mu}_n), \end{aligned}$$

siempre que $g'(\mu_0) \neq 0$. Entonces el desvío estándar de $\hat{\theta}_n$, $sd(\hat{\theta}_n)$, puede aproximarse por

$$sd(\hat{\theta}_n) = \sqrt{Var(\hat{\theta}_n)} \approx |g'(\mu_0)| \sqrt{Var(\hat{\mu}_n)} = |g'(\mu_0)| sd(\hat{\mu}_n).$$

Observemos que esta aproximación del desvío estándar de $\hat{\theta}_n$ depende del valor desconocido μ_0 . Para que podamos hacer uso de ella, necesitamos estimarlo. Luego la expresión

$$sd(\hat{\theta}_n) \approx |g'(\hat{\mu}_n)| sd(\hat{\mu}_n). \quad (6)$$

será de mayor utilidad. Si no conocemos el valor de la varianza de $\hat{\mu}_n$, también podemos aproximarlo con lo calculado en la muestra. Cuán buenas resulten ser estas aproximaciones depende de cuán no lineal sea g en un entorno de μ_0 y de cuán cerca esté $\hat{\mu}_n$ de μ_0 . Volvamos al ejemplo.

Ejemplo 3 (*Área de un círculo, continuación*).

Calculemos el desvío estándar de $\hat{\theta}_n$. En este caso,

$$g(\mu_0) = \frac{\pi}{4} \mu_0^2,$$

por lo que

$$g'(\mu_0) = \frac{\pi}{2} \mu_0.$$

Además, sabemos que un estimador consistente de μ es \bar{X}_n , por lo que

$$\text{Var}(\hat{\mu}_n) = \text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{\text{Var}(X_1)}{n}.$$

Si conocemos la $\text{Var}(X_1)$ que es la varianza asociada al método de medición la podemos usar. Si no la conocemos, la podemos estimar por S_X^2 , la varianza muestral basada en las X 's. Luego

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{\mu}_n) = \frac{S_X^2}{n},$$

donde el sombrero grande sobre $\text{Var}(\hat{\mu}_n)$ indica que $\frac{S_X^2}{n}$ es un estimador de esta cantidad. Finalmente, el desvío estándar del estimador propuesto en (4) se puede aproximar por

$$\text{sd}(\hat{\theta}_n) = \frac{\pi}{2} \bar{X}_n \frac{S_X}{\sqrt{n}}, \quad \text{donde } S_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

Ejemplo 4 (Rice [2006]) Se quiere determinar la resistencia media de un medio, explotando la relación que hay entre voltaje (V), corriente (I) y resistencia (R). Supongamos que el voltaje se mantiene constante en un valor V_0 a través de un medio cuya resistencia fluctúa aleatoriamente como resultado, por ejemplo, de fluctuaciones aleatorias a nivel molecular. Por lo tanto, la corriente también varía al azar. Se pueden hacer determinaciones experimentales (mediciones) de la corriente, I_1, \dots, I_n i.i.d. con

$$\mu_I = E(I_i) \text{ y } \sigma_I^2 = \text{Var}(I_i).$$

Dado que no conocemos la distribución de la resistencia, apelaremos a una aproximación. Si llamamos μ_R a la resistencia media, resulta

$$\mu_R = g(\mu_I) = \frac{V_0}{\mu_I}.$$

Luego, un estimador de μ_I es la media muestral de las corrientes medidas, \bar{I}_n y por lo tanto, un estimador de μ_R será

$$\hat{\mu}_R = g(\hat{\mu}_I) = \frac{V_0}{\hat{\mu}_I}.$$

Derivamos a g , obteniendo

$$g'(\mu_I) = -\frac{V_0}{\mu_I^2}$$

y observemos que

$$\text{Var}(\hat{\mu}_I) = \text{Var}(\bar{I}_n) = \frac{\sigma_I^2}{n}$$

Si σ_I^2 es conocida, utilizamos su valor, si no la conocemos la podemos aproximar por la varianza muestral, es decir

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{\mu}_I) = \frac{S_I^2}{n},$$

donde $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (I_i - \bar{I}_n)^2$. Finalmente, reemplazando en (6) tenemos que

$$\begin{aligned} \text{Var}(\widehat{\mu}_R) &\approx [g'(\widehat{\mu}_I)]^2 \text{Var}(\widehat{\mu}_I) \\ &= \frac{V_0^2 S_I^2}{\widehat{\mu}_I^4 n} \end{aligned}$$

Vemos que la variabilidad de $\widehat{\mu}_R$ depende tanto del nivel medio o esperanza de I como de la varianza de I . Esto tiene sentido, ya que si μ_I es bastante pequeño, pequeñas variaciones de $\widehat{\mu}_I$ resultarán en grandes variaciones en la estimación de μ_R , mientras que si μ_I es grande, pequeñas variaciones de $\widehat{\mu}_I$ no afectarán tanto a la estimación de μ_R .

2.2. Funciones de dos parámetros

Consideremos ahora el caso en el que el parámetro de interés θ depende de dos parámetros: μ_1 y μ_2 , ligados por una función conocida g ,

$$\theta_0 = g(\mu_{10}, \mu_{20}).$$

Notamos $\boldsymbol{\mu}_0$ al punto (μ_{10}, μ_{20}) de valores verdaderos. Tenemos un estimador para cada parámetro μ : $\widehat{\mu}_1$ y $\widehat{\mu}_2$ y proponemos al estimador de θ

$$\widehat{\theta} = g(\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2).$$

Para aproximar su varianza hacemos el desarrollo de Taylor de orden uno,

$$\widehat{\theta} = g(\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2) \approx g(\boldsymbol{\mu}_0) + \left[\frac{\partial g}{\partial x}(\boldsymbol{\mu}_0) \right] (\widehat{\mu}_1 - \mu_{10}) + \left[\frac{\partial g}{\partial y}(\boldsymbol{\mu}_0) \right] (\widehat{\mu}_2 - \mu_{20}), \quad (7)$$

donde el término $\frac{\partial g}{\partial x}(\boldsymbol{\mu}_0)$ denota la derivada parcial de g con respecto a su primer coordenada evaluada en el punto $\boldsymbol{\mu}_0$ y nuevamente despreciamos el error. A partir de (7), la varianza de $\widehat{\theta}$ puede ser aproximada por

$$\begin{aligned} \text{Var}(\widehat{\theta}) &\approx \text{Var} \left[\left[\frac{\partial g}{\partial x}(\boldsymbol{\mu}_0) \right] (\widehat{\mu}_1 - \mu_{10}) \right] + \text{Var} \left[\left[\frac{\partial g}{\partial y}(\boldsymbol{\mu}_0) \right] (\widehat{\mu}_2 - \mu_{20}) \right] \\ &\quad + 2\text{Cov} \left(\left[\frac{\partial g}{\partial x}(\boldsymbol{\mu}_0) \right] (\widehat{\mu}_1 - \mu_{10}), \left[\frac{\partial g}{\partial y}(\boldsymbol{\mu}_0) \right] (\widehat{\mu}_2 - \mu_{20}) \right) \\ &= \left[\frac{\partial g}{\partial x}(\boldsymbol{\mu}_0) \right]^2 \text{Var}(\widehat{\mu}_1 - \mu_{10}) + \left[\frac{\partial g}{\partial y}(\boldsymbol{\mu}_0) \right]^2 \text{Var}(\widehat{\mu}_2 - \mu_{20}) \\ &\quad + 2 \left[\frac{\partial g}{\partial x}(\boldsymbol{\mu}_0) \right] \left[\frac{\partial g}{\partial y}(\boldsymbol{\mu}_0) \right] \text{Cov}((\widehat{\mu}_1 - \mu_{10}), (\widehat{\mu}_2 - \mu_{20})) \\ &= \left[\frac{\partial g}{\partial x}(\boldsymbol{\mu}_0) \right]^2 \text{Var}(\widehat{\mu}_1) + \left[\frac{\partial g}{\partial y}(\boldsymbol{\mu}_0) \right]^2 \text{Var}(\widehat{\mu}_2) \\ &\quad + 2 \left[\frac{\partial g}{\partial x}(\boldsymbol{\mu}_0) \right] \left[\frac{\partial g}{\partial y}(\boldsymbol{\mu}_0) \right] \text{Cov}(\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2). \end{aligned} \quad (8)$$

Si $\widehat{\mu}_1$ y $\widehat{\mu}_2$ son independientes, entonces resulta que $Cov(\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2) = 0$ y la aproximación anterior se simplifica. Nuevamente, para poder aplicar este resultado necesitamos reemplazar a $\boldsymbol{\mu}_0$ por $\widehat{\boldsymbol{\mu}} = (\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2)$ en las derivadas de la ecuación (8),

$$\begin{aligned} Var(\widehat{\theta}) &\approx \left[\frac{\partial g}{\partial x}(\widehat{\boldsymbol{\mu}}) \right]^2 Var(\widehat{\mu}_1) + \left[\frac{\partial g}{\partial y}(\widehat{\boldsymbol{\mu}}) \right]^2 Var(\widehat{\mu}_2) \\ &+ 2 \left[\frac{\partial g}{\partial x}(\widehat{\boldsymbol{\mu}}) \right] \left[\frac{\partial g}{\partial y}(\widehat{\boldsymbol{\mu}}) \right] Cov(\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2). \end{aligned} \quad (9)$$

Recordemos que $Cov(\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2) = \rho(\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2) sd(\widehat{\mu}_1) sd(\widehat{\mu}_2)$ donde $\rho(\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2)$ es el coeficiente de correlación (de Pearson) entre las variables $\widehat{\mu}_1$ y $\widehat{\mu}_2$.

El caso general de una función de k parámetros se puede resolver de manera similar.

Ejemplo 5 (Rice [2006]) *Cociente de dos parámetros. Consideremos el caso en el que $\theta = \mu_2/\mu_1$, que surge con frecuencia en la práctica, por ejemplo, interesa conocer las concentraciones relativas de dos sustancias. Para ello, se harán n_1 determinaciones independientes de la concentración de la sustancia 1, X_1, \dots, X_{n_1} con $E(X_i) = \mu_1$ y $Var(X_i) = \sigma_1^2$. Análogamente, se realizarán n_2 determinaciones independientes de la concentración de la sustancia 2, Y_1, \dots, Y_{n_2} con $E(Y_i) = \mu_2$ y $Var(Y_i) = \sigma_2^2$. El parámetro de interés $\theta = \mu_2/\mu_1 = g(\mu_1, \mu_2)$. Contamos con los estimadores de las concentraciones de ambas sustancias:*

$$\widehat{\mu}_1 = \overline{X}_{n_1}, \quad \widehat{\mu}_2 = \overline{Y}_{n_2}.$$

A partir de ellos obtenemos un estimador de la concentración relativa dado por el cociente

$$\widehat{\theta} = g(\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2) = \frac{\widehat{\mu}_2}{\widehat{\mu}_1}.$$

¿Cómo aproximamos su varianza? Usando el método de propagación de errores derivado anteriormente, para

$$g(x, y) = \frac{y}{x},$$

tenemos

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{x^2} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x}.$$

Luego, si $\widehat{\mu}_1 \neq 0$ tenemos

$$\frac{\partial g}{\partial x}(\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2) = -\frac{\widehat{\mu}_2}{\widehat{\mu}_1^2} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2) = \frac{1}{\widehat{\mu}_1}.$$

Dado que $Cov(\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2) = \rho \sqrt{Var(\widehat{\mu}_1)} \sqrt{Var(\widehat{\mu}_2)}$, donde ρ es la correlación entre $\widehat{\mu}_1$ y $\widehat{\mu}_2$, a partir de (9) si tenemos estimadores para las tres cantidades $\widehat{\rho}$, $\widehat{Var}(\widehat{\mu}_1)$ y $\widehat{Var}(\widehat{\mu}_2)$

obtenemos la siguiente aproximación para la varianza de $\hat{\theta}$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\theta}) &\approx \left[\frac{\partial g}{\partial x}(\hat{\boldsymbol{\mu}}) \right]^2 \widehat{\text{Var}}(\hat{\mu}_1) + \left[\frac{\partial g}{\partial y}(\hat{\boldsymbol{\mu}}) \right]^2 \widehat{\text{Var}}(\hat{\mu}_2) + 2 \left[\frac{\partial g}{\partial x}(\hat{\boldsymbol{\mu}}) \right] \left[\frac{\partial g}{\partial y}(\hat{\boldsymbol{\mu}}) \right] \widehat{\text{Cov}}(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2) \\ &= \left[-\frac{\hat{\mu}_2}{\hat{\mu}_1^2} \right]^2 \widehat{\text{Var}}(\hat{\mu}_1) + \frac{1}{\hat{\mu}_1^2} \widehat{\text{Var}}(\hat{\mu}_2) + 2 \left[-\frac{\hat{\mu}_2}{\hat{\mu}_1^2} \right] \left[\frac{1}{\hat{\mu}_1} \right] \hat{\rho} \sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{\mu}_1)} \sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{\mu}_2)} \\ &= \frac{1}{\hat{\mu}_1^2} \left(\frac{\hat{\mu}_2^2}{\hat{\mu}_1^2} \widehat{\text{Var}}(\hat{\mu}_1) + \widehat{\text{Var}}(\hat{\mu}_2) - 2 \frac{\hat{\mu}_2}{\hat{\mu}_1} \hat{\rho} \sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{\mu}_1)} \sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{\mu}_2)} \right) \end{aligned}$$

A partir de esta ecuación, vemos que la varianza del estimador del cociente es bastante grande cuando μ_1 es muy pequeña, y que si la correlación entre $\hat{\mu}_1$ y $\hat{\mu}_2$ es del mismo signo, eso disminuye la $\text{Var}(\hat{\theta})$.

Ejemplo 6 (Cociente de dos parámetros estimados independientemente). Sigamos el ejemplo anterior en el caso en el que los estimadores $\hat{\mu}_1$ y $\hat{\mu}_2$ son independientes, lo que implica $\text{Cov}(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2) = 0$. En esta situación, reemplazando en (9) obtenemos

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \approx \frac{\hat{\mu}_2^2}{\hat{\mu}_1^4} \text{Var}(\hat{\mu}_1) + \frac{1}{\hat{\mu}_1^2} \text{Var}(\hat{\mu}_2).$$

En algunas aplicaciones, en vez de conocerse las varianzas de los estimadores, se conoce (o se puede estimar) el desvío estándar relativo de cada estimador, es decir, se conoce

$$\frac{sd(\hat{\mu}_1)}{\hat{\mu}_1} \text{ y } \frac{sd(\hat{\mu}_2)}{\hat{\mu}_2}.$$

En tal caso, la aproximación del cuadrado del desvío estándar relativo de $\hat{\theta}$ adquiere una expresión sencilla (bajo independencia de los estimadores)

$$\frac{\text{Var}(\hat{\theta})}{\hat{\theta}^2} = \left[\frac{sd(\hat{\theta})}{\hat{\theta}} \right]^2 \approx \frac{\frac{\hat{\mu}_2^2}{\hat{\mu}_1^4} \text{Var}(\hat{\mu}_1) + \frac{1}{\hat{\mu}_1^2} \text{Var}(\hat{\mu}_2)}{\left(\frac{\hat{\mu}_2}{\hat{\mu}_1} \right)^2}.$$

Simplificando, vemos que el desvío estándar relativo de $\hat{\theta}$ puede aproximarse por

$$\frac{sd(\hat{\theta})}{\hat{\theta}} \approx \sqrt{\left(\frac{sd(\hat{\mu}_1)}{\hat{\mu}_1} \right)^2 + \left(\frac{sd(\hat{\mu}_2)}{\hat{\mu}_2} \right)^2}.$$

A este desvío estándar relativo se lo suele expresar en porcentaje.

2.3. Ejercicios

1. El volumen de una burbuja se estima midiendo su diámetro y usando la relación

$$V = \frac{\pi}{6} D^3$$

Queremos hallar una expresión aproximada para la varianza del volumen.

- a) Sean D_i = i-ésima medición del diámetro, $1 \leq i \leq n$, variables aleatorias i.i.d. Sea $\mu_0 = E(D_i)$ el diámetro esperado. Luego, el verdadero volumen de la burbuja será

$$\theta_0 = \frac{\pi}{6} \mu_0^3 = g(\mu_0).$$

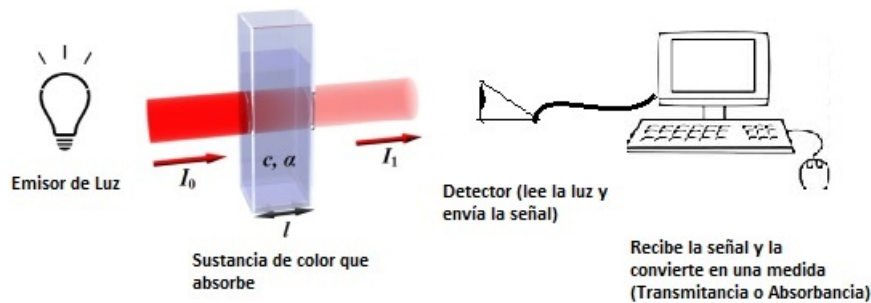
Proponer un estimador de μ y de θ . Escribir el desarrollo de Taylor de la función g , alrededor de μ_0 . A partir de este desarrollo y despreciando el término del error de Taylor, aproximar la varianza de $\hat{\theta}$.

- b) Se mide $n = 10$ veces el diámetro de la burbuja, obteniéndose

$$\bar{D}_{10} = 2mm \quad \text{y} \quad S_D^2 = 0,4$$

Dé una estimación del volumen basada en la muestra y aproxime la varianza del estimador propuesto.

2. (Adaptado de la Guía de Laboratorio de Química Analítica, 2017). La Ley de Lambert - Beer relaciona la intensidad de luz entrante en un medio con la intensidad saliente (luego de que se produzca absorción en dicho medio). La relación de las intensidades puede expresarse como Transmitancia de la siguiente manera:



$$T = \frac{I_1}{I_0} = e^{-alc} = e^{-A}$$

donde:

- I_0 e I_1 son las intensidades entrante (o incidente) respectivamente y saliente (o transmitida).
- A es la absorbancia (es equivalente a una conversión de medida, $A = -\log(T)$). Esta es la cantidad que mide el espectrofotómetro.

- l es la longitud del medio por donde pasa la luz (generalmente se emplea una cubeta).
- c es la concentración de la sustancia.
- α es el coeficiente de absorción (molar si se expresa $[C] = M$ entonces, $\alpha = \varepsilon(\lambda)$)

λ representa la longitud de onda en la cual encontramos los máximos de absorción, por lo que λ es constante (se lo define experimentalmente de manera previa o por tabla pero es fijo). La ley de Lambert-Beer determina que hay una relación exponencial entre la Transmitancia y, la longitud del cuerpo y también entre la Transmitancia y la concentración de la sustancia.

Si conocemos l y $\varepsilon(\lambda)$, la concentración se deduce de la cantidad de luz transmitida, la cual es recibida por un espectrofotómetro como Absorbancia. La ley se simplifica de la siguiente manera:

$$A - A_0 = \varepsilon(\lambda)lc$$

(A_0 es la Absorbancia de las sustancias que no quiero medir por lo que se resta o se calibra el espectrofotómetro para que $A_0 = 0$, es decir, se resta un *blanco*.)
 Cómo $\varepsilon(\lambda)$ varía con la temperatura y la presencia de otras sustancias, se realiza un ajuste lineal de soluciones patrón de concentraciones conocidas encontrando a $\varepsilon(\lambda)$ como la pendiente de la recta que relaciona Absorbancia con concentración. En esta materia haremos análisis de este tipo en la Práctica de Regresión lineal simple. Ahí veremos cómo estimar el desvío estándar de la pendiente, a partir de otra muestra.

En un experimento realizado de forma independiente, hemos estimado al valor esperado y al desvío estándar de (la variable aleatoria) $\varepsilon(\lambda)$ por 5.785 y 0.2052 respectivamente. Asumamos que la cubeta mide $l = 1\text{cm}$. Se tiene una muestra incógnita cuya concentración se quiere determinar. Se mide $n = 3$ veces la Absorbancia de esta muestra incógnita utilizando el espectrofotómetro, lo que da lugar a los siguientes valores: 0.724, 0.694, 0.75 (cuya media muestral da 0.723 y su desvío estándar muestral es 0.0280). Asuma $A_0 = 0,01$, valor fijo (no variable aleatoria).

- Estime la concentración de la muestra incógnita y aproxime el desvío estándar del estimador obtenido, y su desvío estándar relativo.
- ¿El desvío estándar estimado, es mucho más grande que el mayor desvío estándar involucrado?

Esto ilustra una conclusión que suele ser más general: todos los esfuerzos involucrados en disminuir la variabilidad del resultado final de un experimento deben ser dirigidos a mejorar la precisión de los valores (de las mediciones) menos precisas. Por el contrario, no suele tener impacto el dedicar esfuerzo a mejorar mediciones que de por sí son bastantes precisas. Pero cuidado, muchas veces la combinación de varios errores pequeños a lo largo de distintas etapas de un experimento puede propagarse y producir un error final apreciable.

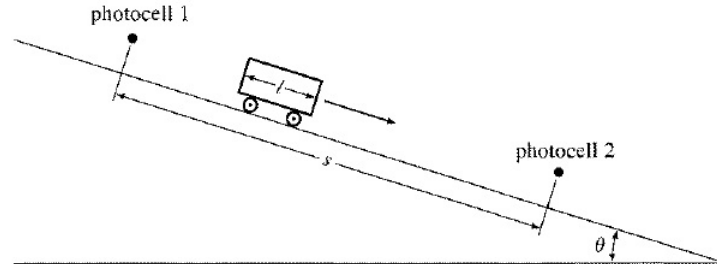
3. (Reescrito a partir del publicado en el libro de Taylor [1997]) (Aceleración de un carrito bajando un plano inclinado). Consideremos un carrito bajando un plano inclinado, como en la Figura 3. Queremos estimar la aceleración que alcanza y aproximar el desvío estándar del estimador. Hay dos formas de hacerlo.

a) Sea θ_0 el verdadero ángulo de la inclinación.

- 1) La aceleración esperada es $a_0 = g \sin \theta_0$, donde g es la aceleración de la gravedad, por lo que si medimos el ángulo θ podemos calcular su aceleración y la incerteza asociada a este cálculo. Sean X_1, \dots, X_n mediciones independientes del ángulo, con $E(X_i) = \theta_0$. Dé un estimador de θ , y a partir de la relación entre el ángulo y la aceleración, también dé un estimador de la aceleración esperada, y aproxime el desvío estándar relativo del estimador obtenido.
- 2) Se mide θ cinco veces obteniéndose un valor de $\bar{X}_n = 5,4$ grados con desvío estándar muestral $S_X = 0.224$. Estime la aceleración esperada y aproxime el desvío estándar del estimador.

b) También puede medirse la aceleración a cronometrando el tiempo que le toma al carrito recorrer la distancia entre dos células fotoeléctricas, como se ve en la Figura 3, cada una conectada a un reloj. Si el carrito tiene longitud l y le toma

Figura 3: Un carrito bajando el plano inclinado. Fuente: Taylor [1997]



tiempo t_1 atravesar la primer célula, su velocidad será $v_1 = l/t_1$. De la misma forma, $v_2 = l/t_2$. (Estrictamente hablando, estas velocidades son las velocidades promedio con las que el carrito atraviesa la célula fotoeléctrica. Pero mientras l sea pequeña, la diferencia entre la velocidad instantánea y la promedio será despreciable). Llamamos s a la distancia entre las dos fotocélulas, entonces se sabe que

$$v_2^2 = v_1^2 + 2as,$$

por lo que

$$a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2s} = \frac{l^2}{2s} \left(\frac{1}{t_2^2} - \frac{1}{t_1^2} \right). \quad (10)$$

- 1) Consideremos que las cuatro cantidades l, s, t_1 y t_2 se miden de forma independiente. Llamemos $\theta_1 = \frac{l^2}{2s}$ y $\theta_2 = \frac{1}{t_2^2} - \frac{1}{t_1^2}$. Dé estimadores de θ_1 y θ_2 a partir de estimadores de las cuatro cantidades l, s, t_1 y t_2 . Dé estimadores de los desvíos estándares relativos de $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ a partir de los desvíos estándares relativos de los estimadores de cuatro cantidades l, s, t_1 y t_2 .
- 2) A partir de los estimadores de θ_1 y θ_2 obtenidos, estime la aceleración a , usando (10). Dé un estimador del desvío estándar relativo de \hat{a} .
- 3) Se hacen $n = 3$ mediciones de las cuatro cantidades involucradas. A partir de los siguientes valores observados para los promedios y desvíos muestrales de dichas mediciones de l, s, t_1 y t_2 aproxime la aceleración y su desvío estándar relativo, asumiendo que todas las variables medidas son independientes.

$$\begin{aligned}
 \bar{l} &= 5cm. & S_l &= 0.087 \\
 \bar{s} &= 100cm. & S_s &= 0.35 \\
 \bar{t}_1 &= 0.054s. & S_{t_1} &= 0.0018 \\
 \bar{t}_2 &= 0.031s. & S_{t_2} &= 0.0018
 \end{aligned}$$

Referencias

- Miller, J. N., y Miller, J. C. (2011). *Statistics and chemometrics for analytical chemistry*. Pearson Education.
- Rice, J. (2006). *Mathematical statistics and data analysis*. Nelson Education.
- Taylor, J. (1997). *Introduction to error analysis, the study of uncertainties in physical measurements*.
- Wasserman, L. (2013). *All of statistics: a concise course in statistical inference*. Springer Science & Business Media.