Ecuaciones Diferenciales – 2° cuatrimestre 2018

Práctica 7: Espacios de Sobolev & Soluciones débiles

Ejercicio 1. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sean $u,\ v \in W^{k,p}(U),\ |\alpha| \le k$. Entonces:

1. $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(U)$ y $D^\beta\left(D^\alpha u\right) = D^\alpha\left(D^\beta u\right) = D^{\alpha+\beta}u$ para todo par de multiíndices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ tales que $|\alpha| + |\beta| \le k$.
2. Para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(U)$ y $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$.
3. Si $V \subset U$, entonces $u \in W^{k,p}(V)$.
4. Si $\zeta \in C_c^\infty(U)$, entonces $\zeta u \in W^{k,p}(U)$ y
$$D^\alpha(\zeta u) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\alpha \zeta D^{\alpha-\beta} u.$$

Ejercicio 2. Sea $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervalo.

1. Probar que si $u \in W^{1,p}(I)$, $1 \le p < \infty$ entonces $u \in AC(I)$.
2. Probar que si $u \in W^{1,p}(I)$, $p > 1$, entonces
$$|u(x) - u(y)| \le \left(\int_a^b |u'|^p dt\right)^{1/p} |x - y|^{1-\frac{1}{p}}.$$

Ejercicio 3. Sea $f \in H^1(\mathbb{R})$, probar que $h^{-1}(\tau_h f - f)$ converge a f' en $L^2(\mathbb{R})$ cuando $h \to 0$, donde $\tau_h f(x) = f(x + h)$.

Sugerencia: escribir $h^{-1}(\tau_h f - f)$ como $f' * \varphi_h$.

Ejercicio 4. Sea $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervalo.

1. Probar que existe una constante C tal que para toda $f \in H^1(I)$,
$$|f(x)| \le C\|f\|_{1,2}.$$
2. Probar que existe una constante C tal que para toda $f \in H_0^1(I)$,
$$|f(x)| \le C\|f'\|_2.$$
3. Concluir que $\|f'\|_2$ es una norma equivalente a $\|f\|_{1,2}$ en $H_0^1(I)$.
4. Mostrar que el ítem 1 es falso en $U \subset\subset \mathbb{R}^2$.
5. Usando el teorema de Arzela-Ascoli, probar que un conjunto acotado de $H^1(I)$ es precompacto en $C(\bar{I})$, y por lo tanto en $L^2(I)$.

Ejercicio 5. Sea $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f \in L^2(I)$. Probar que $f \in H^1(I)$ si y sólo si
$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 |\hat{f}(k)|^2 < \infty,$$
donde $\hat{f}(k)$ son los coeficientes del desarrollo de f en series de Fourier.

Ejercicio 6. Sea $u \in W^{k,p}(U),\ 1 \le p < \infty$. Definimos $u^\varepsilon \equiv \rho_\varepsilon * u$ en U_ε, donde ρ es el núcleo regularizante, ρ_ε las aproximaciones de la identidad y
$$U_\varepsilon := \{x \in U\colon\ \mathrm{dist}(x, \partial U) > \varepsilon\}.$$

Entonces:

1. $u^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$, para cada $\varepsilon > 0$.
2. $u^\varepsilon \to u$ en $W^{k,p}_{\mathrm{loc}}(U)$ cuando $\varepsilon \to 0$.

Ejercicio 7. Sea U abierto y acotado. Probar que si $u \in H^2(U) \cap H_0^1(U)$ entonces

$$\int_U |Du|^2\,dx \le C\left(\int_U |u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_U |\Delta u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Concluir que en $H_0^2(U)$, $\|\Delta u\|_2$ es una norma equivalente a la usual.

Ejercicio 8. Sea $u \in W^{1,p}(U)$ tal que $\nabla u = 0$ a.e. en U. Probar que u es constante en cada componente conexa de U.

Ejercicio 9 (Desigualdad de Poincaré)**.** Sea U un abierto conexo y acotado de $\mathbb{R}^n$ con borde C^1. Probar que existe una constante $C > 0$ que depende sólo de n y U tal que

$$\|u - (u)_U\|_2 \le C\|\nabla u\|_2$$

para cada $u \in H^1(U)$, donde

$$(u)_U = \fint_U u\,dx.$$

Sugerencia: Razonar por el absurdo y usar la compacidad de la inclusión $W^{1,p}(U) \subset\subset L^p(U)$.

Ejercicio 10. Sea $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 con F' acotada. Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado y $u \in W^{1,p}(U)$ con $1 < p < \infty$. Probar que

$$F(u) \in W^{1,p}(U) \quad \text{y} \quad \partial_i F(u) = F'(u)\partial_i u \ (i = 1, \dots, n).$$

Ejercicio 11. Sea $1 < p < \infty$ y $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado.

1. Probar que si $u \in W^{1,p}(U)$, entonces $|u| \in W^{1,p}(U)$.
2. Probar que si $u \in W^{1,p}(U)$, entonces $u^+, u^- \in W^{1,p}(U)$ y

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u & \text{c.t.p. en } \{u > 0\} \\ 0 & \text{a.e. en } \{u \le 0\}, \end{cases}$$

$$\nabla u^- = \begin{cases} 0 & \text{c.t.p. en } \{u \ge 0\} \\ -\nabla u & \text{c.t.p. en } \{u < 0\}. \end{cases}$$

   Sugerencia: $u^+ = \lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(u)$ para

$$F_\varepsilon(t) = \begin{cases} \sqrt{t^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon & \text{si } t \ge 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

3. Probar que si $u \in W_0^{1,p}(U)$ entonces $u^+, u^- \in W_0^{1,p}(U)$.
4. Probar que si $u \in W^{1,p}(U)$, entonces

$$\nabla u = 0 \text{ c.t.p. en } \{u = 0\}.$$

Ejercicio 12. Usar la transformada de Fourier para probar que si $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$ con $k > n/2$, entonces $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le C\|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)}$$

donde C es una constante que depende de k y n.

Ejercicio 13. Sea U abierto y acotado. Una función $u \in H_0^2(U)$ se dice una solución débil del siguiente problema de valores de contorno para el operador *bilaplaciano*

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{en } U \\ u = \partial_{\mathbf{n}} u = 0 & \text{en } \partial U, \end{cases} \tag{1}$$

si verifica

$$\int_U \Delta u \Delta v\, dx = \int_U fv\, dx$$

para toda $v \in H_0^2(U)$. ($\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$).

1. Probar que $u \in C^4(U) \cap C^1(\overline{U})$ es solución clásica de (1) si y sólo si es solución débil de (1).
2. Probar que dada $f \in L^2(U)$ existe una única solución débil de (1).

   Sugerencia: Usar el Ejercicio 7 de la práctica 7 para probar que $\|\Delta u\|_{L^2(U)}$ define una norma equivalente a la usual en $H_0^2(U)$.

Ejercicio 14. Consideremos el problema de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } U \\ \partial_{\mathbf{n}} u = 0 & \text{en } \partial U \end{cases}$$

donde $\partial U \in C^1$ y $f \in L^2(U)$.

1. Mostrar que $u \in C^2(U) \cap C^1(\overline{U})$ es solución del problema de Neumann si y sólo si verifica la siguiente *formulación débil*:

$$\int_U \nabla u \cdot \nabla \varphi\, dx + \int_U u\varphi\, dx = \int_U f\varphi\, dx$$

   para toda $\varphi \in C^1(U) \cap C(\overline{U})$.
2. Mostrar que para toda $f \in L^2(U)$ existe una única $u \in H^1(U)$ solución débil de este problema.

Ejercicio 15. Consideremos el siguiente operador elíptico

$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)u_{x_j}) + \sum_{j=1}^n b_j(x)u_{x_j} + c(x)u,$$

donde $\lambda|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \Lambda|\xi|^2\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$ y $x \in \Omega$; $c \in L^\infty$, $c \ge 0$ y $c_j \in L^\infty(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ con $\operatorname{div}(b) = 0$ en Ω.

Probar que para toda $f \in L^2(\Omega)$ existe una única $u \in H_0^1(\Omega)$ solución débil del problema.

Ejercicio 16. Consideremos el problema de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } U \\ \partial_{\mathbf{n}} u = 0 & \text{en } \partial U, \end{cases}$$

donde $\partial U \in C^1$ y $f \in L^2(U)$.

1. Dar una formulación débil del problema y mostrar que si existe una solución débil, entonces $\int_U f\, dx = 0$.
2. Mostrar que si $f \in L^2(U)$ verifica que $\int_U f\, dx = 0$, entonces existe una única $u \in H^1(U)$ con $\int_U u\, dx = 0$ solución débil de este problema. Más aún, dicha solución es única en $H^1(U)$ salvo constante.

Ejercicio 17 (Principio débil del máximo)**.** Sea $\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^n \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u)$ un operador uniformemente elíptico con $a_{ij} \in L^\infty(U)$.

Decimos que $u \in H^1(U)$ verifica $\mathcal{L}u \le 0$ en sentido débil o, equivalentemente, que es una subsolución débil de $\mathcal{L}u = 0$ si

$$\int_U \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\partial_j u \partial_i v\, dx \le 0, \quad \text{para toda } v \in H_0^1(U),\ v \ge 0.$$

1. Verificar que $u \in C^2(U)$ es subsolución débil de $\mathcal{L}u = 0$ si y sólo si $\mathcal{L}u \leq 0$.
2. Probar que si u es subsolución débil de $\mathcal{L}u = 0$ y $u^+ \in H_0^1(U)$ (es decir $u \leq 0$ en ∂U), se tiene que $u \leq 0$ en U.

Ejercicio 18. Consideremos el siguiente problema de autovalores

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en } U \\ \partial_{\mathbf{n}} u = 0 & \text{en } \partial U, \end{cases}$$

donde $\partial U \in C^1$.

Probar que existe una sucesión $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \uparrow \infty$ de autovalores del problema con autofunciones $u_k \in H^1(U)$ donde $u_1 = cte$ y $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ forman una base ortonormal de $L^2(U)$ y una base ortogonal de $H^1(U)$.

Ejercicio 19 (Lema de Cea)**.** Se intenta construir una aproximación de la solución del siguiente problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } U \\ u = 0 & \text{en } \partial U. \end{cases}$$

Para eso, se toma un subespacio de dimensión finita $\mathbb{V} \subset H_0^1(U)$, $\mathbb{V} = \text{gen}\{\phi_1, \dots, \phi_d\}$ y se define la *solución aproximada* $\tilde{u} \in \mathbb{V}$ como la solución del problema

$$\int_U \nabla \tilde{u} \cdot \nabla \phi_i \, dx = \int_U f \phi_i \, dx \quad i = 1, \dots, d.$$

1. Probar que $\tilde{u}$ está bien definida (es decir, existe una única solución del problema aproximado).
2. Probar que se tiene la siguiente *estimación de error*

$$\|u - \tilde{u}\|_{H_0^1(U)} \leq C \inf_{v \in \mathbb{V}} \|u - v\|_{H_0^1(U)},$$

donde $C > 0$ es una constante que depende únicamente de $\mathbb{V}$.

Esto dice que el método propuesto obtiene como resultado la *mejor aproximación* que permite el subespacio $\mathbb{V}$.

Ejercicio 20. Se define el $p-$*Laplaciano* como $\Delta_p u := \text{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ con $p > 1$ (cuando $p = 2$, $\Delta_p = \Delta$). Consideremos el siguiente problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f & \text{en } U \\ u = 0 & \text{en } \partial U, \end{cases} \tag{2}$$

donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado y $f \in L^{p'}(U)$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$).

1. Probar que $u \in C_0^2(U)$ es solución de (2) si y sólo si verifica la siguiente formulación débil

$$\int_U |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_U f \varphi \, dx,$$

para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(U)$.
2. Probar que si $u \in W_0^{1,p}(U)$ minimiza el siguiente funcional

$$\Psi \colon W_0^{1,p}(U) \to \mathbb{R}, \quad \Psi(u) := \frac{1}{p} \int_U |\nabla u|^p \, dx - \int_U f u \, dx,$$

entonces u es una solución débil de (2).

Ejercicio 21. Probar que existe una única solución débil de la ecuación del calor con condiciones de Neumann

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{en } U \times (0,T) \\ \partial_{\mathbf{n}} u = 0 & \text{en } \partial U \times (0,T) \\ u = u_0 & \text{en } U \end{cases}$$