Práctica 2: Transformadas de Gelfand y de Fourier

Convención: Notaremos por G a un grupo abeliano localmente compacto Hausdorff y m a su medidad de Haar que suponemos σ-finita (en cuyo caso $L^1(G)^* = L^\infty(G)$).

Ejercicio 1. Sea A un álgebra de Banach conmutativa con unidad. Probar que a es inversible en A si y sólo si $\widehat{a}$ es inversible en $C(\mathcal{X}_A)$ para todo $a \in A$.

Ejercicio 2. Decidir si las álgebras de los Ejercicios 13, 14 y 15 de la Práctica 1 tienen transformada de Gelfand isométrica.

Ejercicio 3. Sea A un álgebra de Banach conmutativa con unidad. Probar que $\widehat{e^a} = e^{\widehat{a}}$ para todo $a \in A$, donde $e^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a^n$.

Ejercicio 4. Sea $f \in C_c(G)$. Probar que para todo $\varepsilon > 0$ existe V entorno abierto de 0 tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ si $x - y \in V$.

Ejercicio 5. Dados $x \in G$ y una función $f : G \to \mathbb{C}$, se define $f_x(z) := f(z-x)$. Para $f \in L^1(G)$ probar que la aplicación $x \to f_x$ es una función uniformemente continua de G en $L^1(G)$. Es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe V entorno abierto de 0 tal que $\|f_x - f_y\|_1 < \varepsilon$ si $x - y \in V$.

Ejercicio 6. Probar que dados $\varepsilon > 0$ y $f \in L^1(G)$, existe V entorno abierto de 0 tal que $\|f - f * u\|_1 < \varepsilon$ para todo $u \in C_c(V)$ con $\int_G u(x)dm(x) = 1$.

Concluir que existe una red de funciones no negativas $(u_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subseteq L^1(G)$ con $\int_G u_\alpha(x)dm(x) = 1$ para todo $\alpha \in \Lambda$, tal que $\|f - f * u_\alpha\|_1 \to 0$ para toda $f \in L^1(G)$.

Ejercicio 7. Probar que si G es discreto $\widehat{G}$ es compacto y que si G es compacto $\widehat{G}$ es discreto.

Ejercicio 8. Notemos $\mathcal{F}$ a la transformada de Fourier. Probar que $\mathcal{F}(L^1(G))$ es denso en $C_0(\widehat{G})$.

Ejercicio 9. Sea $\mu \in M(\widehat{G})$ tal que $\int_{\widehat{G}} \gamma(x)\, d\mu(\gamma) = 0$ para todo $x \in G$. Probar que $\mu = 0$.

Ejercicio 10. Teorema de Plancherel.

(a) Dada $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$, probar que $\widehat{f} \in L^2(\widehat{G})$ y $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$. Sug: considerar $g = f * f^*$ donde $f^*(x) = \overline{f(-x)}$.

(b) Probar que es posible extender la transformada de Fourier a un isomorfismo isométrico entre $L^2(G)$ y $L^2(\widehat{G})$. Sug: usar el ejercicio anterior para probar que si $< \widehat{f}, \psi >= 0$ para toda $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$, entonces $\widehat{f\,\overline{\psi}} = 0$ para toda $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$.

Ejercicio 11. Probar que $\mathcal{F}(L^1(G)) = L^2(\widehat{G}) * L^2(\widehat{G})$.

Ejercicio 12. Sea $V \subseteq \widehat{G}$ un abierto no vacío. Probar que existe $f \in L^1(G)$ tal que $\widehat{f} \neq 0$ y $\widehat{f}(\gamma) = 0$ para todo $\gamma \in V^c$.

Ejercicio 13. Probar que $\widehat{G}$ separa puntos. Es decir, si $x, y \in G$ con $x \neq y$, entonces existe $\gamma \in \widehat{G}$ tal que $\gamma(x) \neq \gamma(y)$.

($*$)**Ejercicio 14. Teorema de dualidad de Pontryagin.**

Nos proponemos probar que $G = \widehat{\widehat{G}}$. Sea $i : G \hookrightarrow \widehat{\widehat{G}}$ la inclusión dada por la evaluación.

(a) Probar que i es un monomorfismo.

(b) Probar que i es un homeomorfismo con su imagen. Sug: tomar una red $i(x_\alpha) \to 1$ y considerar funciones de la forma $g = f * f^*$.

(c) Probar que $i(G)$ es denso. Sug: usar el Ejercicio 9.

(d) Probar que $i(G)$ es cerrado. Sug: probar que un subespacio denso y localmente compacto en un espacio topológico Hausdorff es abierto, y que los subgrupos abiertos son cerrados.

Ejercicio 15. Probar que la transformada de Fourier es inyectiva.

Ejercicio 16. Caracterizar la transformada de Fourier para $G = \mathbb{R}, \mathbb{T}, \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.