Práctica 1: Un primer paso en álgebras de Banach

Ejercicio 1. Sea $C^m[a,b]$ el conjunto de funciones con derivadas continuas hasta orden m provisto de la siguiente norma:

$$\|f\| := \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \|f^{(k)}\|.$$

Mostrar $C^m[a,b]$ que es un álgebra de Banach.

Ejercicio 2. Mostrar que $L^1(\mathbb{R})$ es una álgebra de Banach con el producto dado por la convolución.

Ejercicio 3. Sea G un grupo topológico localmente compacto y $M(G)$ el espacio de todas las medidas finitas Borel regulares en G (recordar que $C_0(G)^* = M(G)$ por el Teorema de Riesz). Si Si $\mu, \nu \in M(G)$, definimos $\mu * \nu$ de la siguiente manera

$$\mu * \nu\,(f) := \int_G \int_G f(xy)\, d\mu(x)\, d\nu(y) \quad \forall f \in C_0(G).$$

(a) Probar que $M(G)$ es un álgebra de Banach. ¿Tiene unidad?

(b) Probar que $M(G)$ es conmutativa si y sólo si G es un grupo abeliano.

Ejercicio 4. Para $f \in C(\mathbb{T})$ se define el n-ésimo coeficiente de Fourier como

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int}\, dt.$$

Denotemos $AC(\mathbb{T})$ el espacio de todas las funciones $f \in C(\mathbb{T})$ tal que su serie de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{int}$ es absolutamente convergente provisto de la norma $\|f\| := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|$.

(a) Probar que $AC(\mathbb{T})$ es isométricamente isomorfo a ℓ_1.

(b) Calcular $c_n(fg)$ para $f, g \in AC(\mathbb{T})$.

(c) Muestre que $AC(\mathbb{T})$ es un álgebra de Banach conmutativa. ¿Es ℓ_1 un álgebra de Banach conmutativa? ¿Cuál es el producto?

Ejercicio 5. Para X un espacio localmente compacto, mostrar que $\widehat{C_0(X)} \simeq C(X_\infty)$.

Ejercicio 6. Caracterizar $\widehat{c_0}$.

Ejercicio 7. Sea X un espacio topológico. Para todo $x \in X$ consideramos $\delta_x \in C_b(X)^*$ la evaluación en x. Definimos $\Delta : X \to (C_b(X)^*, \omega^*)$ dada por $\Delta(x) := \delta_x$ para todo $x \in X$. Probar que si X es completamente regular, entonces Δ co-restringido a su imagen es un homeomorfismo.

Ejercicio 8. Probar que si X es completamente regular y $C_b(X)$ es separable entonces X es compacto.

Ejercicio 9. Sea X un espacio completamente regular. Mostrar que $C_b(X)^* = M(\beta X)$.

Ejercicio 10. Dado X un espacio compacto, caracterizar los ideales cerrados de $C(X)$.

Ejercicio 11. Sea E un espacio de Banach y $F(E) \subseteq B(E)$ los operadores de rango finito. Mostrar que si I es un ideal cerrado no nulo de $B(E)$ entonces $F(E) \subseteq I$.

Ejercicio 12. Dado $E \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $E^2 = E$, probar que $L_E := \{AE \ : \ A \in M_n(\mathbb{C})\}$ y $R_E := \{EA \ : \ A \in M_n(\mathbb{C})\}$ son ideales a izquierda y derecha respectivamente. Mostrar, sin embargo, que $M_n(\mathbb{C})$ no tiene ideales biláteros no triviales.

Ejercicio 13. Dado X un espacio compacto, probar que $X \simeq \chi_{C(X)}$. ¿Cuáles son los caracteres de $C_b(X)$ para X completamente regular?

Ejercicio 14. Probar que $\mathbb{R} \simeq \chi_{L^1(\mathbb{R})}$.

Ejercicio 15. Sea $A := \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}}) \subseteq C(\overline{\mathbb{D}})$ el álgebra del disco. Probar que $\overline{\mathbb{D}} \simeq \chi_A$.