Práctica 9: Espacios Normados

Ejercicio 1. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado (sobre $k = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Probar que se verifican:

i) Las operaciones $+ : E \times E \to E$ y $\times : k \times E \to E$ son continuas.

ii) $\overline{B_r(x)} = \overline{B}_r(x)$ (es decir, la clausura de la bola abierta es la bola cerrada).

iii) $\operatorname{diam}(B_r(x)) = 2r$.

Ejercicio 2. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea $C \subset E$. Decimos que C es *convexo* si $\forall\, x, y \in C$ y $\forall\, t \in [0,1]$ se tiene que $tx + (1-t)y \in C$.

i) Probar que $B_r(x)$ es convexo.

ii) Probar que si $(C_i)_{i\in I}$ son convexos, entonces $\bigcap_{i\in I} C_i$ lo es.

iii) Probar que si C es convexo, entonces C° lo es.

iv) Probar que si C es convexo, entonces $\overline{C}$ lo es.

Ejercicio 3. Para cada uno de los siguientes ejemplos de subespacios decidir si son cerrados, si son densos y si son hiperplanos.

i) $c = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} :\ \exists \lim_{n\to\infty} x_n\} \subseteq \ell^\infty$.

ii) $c_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \to 0\} \subseteq c$.

iii) $\{x \in \ell^1 : \sum_{n=1}^\infty x_n = 0\} \subseteq \ell^1$.

iv) $\{x \in \ell^2 : \sum_{n=1}^\infty x_n = 0\} \subseteq \ell^2$.

v) $\mathbb{R}[X] \subseteq C[0,1]$.

vi) $C^1[a,b] \subseteq C[a,b]$.

Ejercicio 4. Sean $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ espacios normados. Sea $L(E,F)$ el conjunto de operadores $T : E \to F$ lineales y continuos. Para para cada $T \in L(E,F)$ definimos

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E \le 1} \|T(x)\|_F.$$

Probar que si F es de Banach entonces $L(E,F)$ también lo es.

Ejercicio 5. Sea $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continua y sea $K : C[0,1] \to C[0,1]$ dada por

$$Kf(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y)\, dy.$$

Probar que K es lineal y continua. Acotar su norma.

Ejercicio 6. En $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{(a_n)_{n\geq 1} / \ \exists n_0, \ a_n = 0 \ \forall n \geq n_0\}$ ponemos la norma infinito. Probar que la función $f : \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f((a_n)_{n\geq 1}) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n,$$

es lineal pero no continua.

Ejercicio 7.

i) Sea $\phi \in C[0,1]$ y sea $T_\phi : C[0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$T_\phi f = \int_0^1 f(x)\phi(x)dx.$$

Probar que T_ϕ es un funcional lineal continuo y que $\|T_\phi\| = \int_0^1 |\phi(x)|dx$.

ii) Sea T: $c \to \mathbb{R}$ dada por $T(a) = \lim_{n\to\infty} a_n$. Probar que T es lineal y continuo y hallar $\|T\|$.

iii) Sea $1 \leq p \leq \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$ el conjugado de p y sea $b \in \ell^{p'}$. Definimos $T_b : \ell^p \to \mathbb{R}$ según

$$T_b(a) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n.$$

Probar que T_b es lineal, continuo y hallar $\|T_b\|$.

Ejercicio 8. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado de dimensión n y sea $f : \mathbb{R}^n \to E$ un isomorfismo algebraico. Consideramos en $\mathbb{R}^n$ la norma $\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$.

i) Probar que $K = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\|_\infty = 1\}$ es compacto en $\mathbb{R}^n$.

ii) Probar que existen $c_1, c_2 > 0$ tales que para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$c_1\|x\|_\infty \leq \|f(x)\|_E \leq c_2\|x\|_\infty.$$

iii) Deducir que si N_1, N_2 son dos normas en $\mathbb{R}^n$, entonces existen constantes $a, b > 0$ tales que para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $aN_1(x) \leq N_2(x) \leq bN_1(x)$ (es decir, son equivalentes).

Ejercicio 9. (Lema de Riesz) Sean E un espacio normado, $S \subset E$ un subespacio vectorial cerrado propio, y $0 < \alpha < 1$. Probar que existe $x_\alpha \in E - S$ tal que $\|x_\alpha\| = 1$ y $\|s - x_\alpha\| > \alpha \ \forall s \in S$.
Sugerencia: considerar $x \notin S, \ r = d(x, S)$ y $x_\alpha = \frac{(x-b)}{\|x-b\|}$ con $b \in S$ adecuado.

Ejercicio 10. Sean E un espacio normado de dimensión infinita. Probar que existe $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ tal que $\|\omega_n\| = 1$ y $d(\omega_n, \omega_m) > 1/2, \ n \neq m$. Deducir que $\overline{B_1(0)}$ no es compacta.
Sugerencia: aplicar el lema de Riesz a una sucesión creciente de subespacios de dimensión finita.