# Práctica 7: Compacidad

**Ejercicio 1.**

i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Probar que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{0\}$ es compacto.

ii) Mostrar que el intervalo $(0, 1]$ no es compacto.

iii) Sea $S = (a, b) \cap \mathbb{Q}$ con $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Probar que $S$ es un subconjunto cerrado y acotado pero no compacto de $(\mathbb{Q}, d)$, donde $d$ es la métrica usual de $\mathbb{R}$ restringida a $\mathbb{Q}$.

**Ejercicio 2.** Sea $(X, d)$ un espacio métrico. Probar que:

i) Toda unión finita y toda intersección (finita o infinita) de subconjuntos compactos de $X$ es compacta.

ii) Un subconjunto $F \subset X$ es cerrado si y solo si $F \cap K$ es compacto para todo $K \subset X$ compacto.

**Ejercicio 3.**

i) Probar que en $(\mathbb{R}^n, d_p)$ con $1 \leq p \leq \infty$ la bola de centro 0 y radio 1 es totalmente acotada.

ii) Probar que la bola de centro $x$ y radio $r > 0$ es totalmente acotada.

**Ejercicio 4.** Sean $(X, d)$ e $(Y, d')$ espacios métricos. Se considera $(X \times Y, d_\infty)$, donde

$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \text{máx}\{d(x_1, x_2), d'(y_1, y_2)\}$$

Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es compacto si y solo si $(X, d)$ e $(Y, d')$ son compactos.

**Ejercicio 5.** Sean $\{(X_n, d_n)\}_{n\in N}$ espacios métricos. Recordar que se define el espacio métrico producto $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ la métrica

$$d((x_n), (y_n)) = \sum_n \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}$$

Probar que $(X, d)$ es compacto si y solo si $(X_n, d_n)$ es compacto para todo $n \in \mathbb{N}$.

**Ejercicio 6.** Sea $(X, d)$ un espacio métrico.

i) Sean $K \subseteq X$ un compacto y sea $x \in X - K$. Probar que existe $y \in K$ tal que $d(x, K) = d(x, y)$; es decir, la distancia se realiza.

ii) Sean $F, K \subset X$ dos subconjuntos disjuntos tales que $F$ es cerrado y $K$ es compacto. probar que la distancia entre $F$ y $K$ es positiva.

iii) Sean $K_1,\ K_2 \subset X$ disjuntos. Probar que existen $x_1 \in K_1$, $x_2 \in K_2$ tales que

$$d(K_1, K_2) = d(x_1, x_2);$$

es decir, la distancia se realiza.

**Ejercicio 7.** Dado un cubrimiento por abiertos $\{U_i\}_{i \in I}$ de un espacio métrico $(X, d)$, un número $\varepsilon > 0$ se llama **número de Lebesgue** de $\{U_i\}_{i \in I}$ si para todo $x \in X$ existe $j \in I$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq U_j$. Probar que todo cubrimiento por abiertos de un espacio métrico compacto tiene un número de Lebesgue.

**Ejercicio 8.** Sea $(X, d)$ un espacio métrico compacto. Probar que para cada espacio métrico $(Y, d')$, la proyección $\pi : X \times Y \to Y$ definida por $\pi(x, y) = y$ es cerrada.

**Ejercicio 9.**

i) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq a}$ una función que es uniformemente continua en $[a, b]$ y también en $[b, \infty]$. Probar que $f$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}_{\geq a}$.

ii) Deducir que $\sqrt{x}$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

iii) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y tal que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$. Probar que $f$ es uniformemente continua.

**Ejercicio 10.** Sea $(X, d)$ un espacio métrico y $A \subseteq X$ un compacto. Probar que si $f : A \to \mathbb{R}$ es continua y $f > 0$ para todo $x \in A$, entones existe $K > 0$ tal que $f(x) \geq K$ para todo $x \in A$.

**Ejercicio 11.** Recordar la definición de la métrica de Hausdorff (Ejercicio 19 - práctica 3). Sea $(X, d)$ un espacio métrico compacto. Demostrar que $(\mathcal{F}(X), d_H|_{\mathcal{F}})$ es un espacio métrico compacto.