Práctica 6: Completitud

Ejercicio 1. Sea (X_n, d_n) una sucesión de espacios métricos y sea (X, d) el espacio producto. Mostrar que (X, d) es completo si y solo si (X_n, d_n) es completo para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 2. *Recordar de la práctica 3 que un cerrado es G_δ. Este ejercicio muestra que hay conjuntos G_δ que no son ni cerrados ni abiertos.*
Sea A el subconjunto de $\mathbb{R}$ definido por $A = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Probar que A es un G_δ en $\mathbb{R}$. Hallar una métrica $\tilde{d}$ en A de modo tal que $(A, \tilde{d})$ sea completo y topológicamente equivalente a $(A, |\,.\,|)$.

Ejercicio 3.

i) Probar que todo subespacio vectorial $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es cerrado.

ii) Probar que $\mathbb{R}^n$ no se puede descomponer (escribir) como unión numerable de subespacios vectoriales propios.

Ejercicio 4. Sean (X, d) un espacio métrico completo sin puntos aislados y $D \subseteq X$ un denso numerable. Probar que D no es un G_δ.

Ejercicio 5. Probar que el conjunto ternario de Cantor $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}$ es nunca denso en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 6. *Recordar que un subconjunto de un espacio métrico X es comagro si su complemento es magro en X, es decir si su complemento es de primera categoría.*
Sea (X, d) un espacio métrico completo. Probar que $A \subseteq X$ es comagro si y solo si A contiene un conjunto denso y G_δ.

Ejercicio 7. Demostrar que no existe ninguna función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea continua únicamente en los racionales.
Sugerencia: Para cada $n \in \mathbb{N}$ considerar

$$U_n := \left\{ x \in \mathbb{R} \,:\, \text{existe } U \text{ abierto con } x \in U \text{ y } \operatorname{diam}(f(U)) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Ejercicio 8. Sea $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de intervalos de $[0, 1]$ con extremos racionales y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$E_n := \{f \in C[0, 1] \,:\, f \text{ es monótona en } I_n\}.$$

i) Probar que para cada $n \in \mathbb{N}$, E_n es cerrado y nunca denso en $(C[0, 1], d_\infty)$.

ii) Deducir que existen funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$ que no son monótonas en ningún subintervalo.

Ejercicio 9. Sea $Lip[a, b] = \{f \in C[a, b] \,:\, \text{existe } C > 0,\ |f(x) - f(y)| \le C|x - y|\}$. Probar que $Lip[a, b]^\circ = \emptyset$ en $C[a, b]$.

Ejercicio 10. Probar que si A es el conjunto de funciones continuas que tienen algún intervalo de monotonía, entonces A tiene interior vacío en $C[a, b]$.