Práctica 5: Separabilidad

Ejercicio 1. Usando que $(\mathbb{R}, |.|)$ es separable, demostrar que $(\mathbb{R}^n, d_p)$ con $1 \leq p \leq \infty$ es separable para todo $n \geq 2$.

Ejercicio 2. Usando el teorema de Weierstrass, es decir $\mathbb{R}[X]$ es denso en $(C[a,b], d_\infty)$, demostrar que $(C[a,b], d_p)$ con $1 \leq p \leq \infty$ es separable.

Ejercicio 3. Recordar que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es base de (X, d) si

a) Para todo $B \in \mathcal{B}$, B es abierto;

b) Para todo $A \in X$ abierto, para cada $x \in A$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq A$.

Recordar también que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es subbase si la familia de intersecciones finitas de $\mathcal{S}$ es base.

i) Demostrar que si $f : X \to Y$ es una función entre espacios métricos y $\mathcal{B}$ es base de Y entonces f es continua si y solo si para todo $B \in \mathcal{B}$ se tiene que $f^{-1}(B)$ es abierto.

ii) Demostrar que si $\mathcal{S}$ es una subbase de Y, entonces f es continua si y solo si para todo $S \in \mathcal{S}$ se tiene que $f^{-1}(S)$ es abierto.

Ejercicio 4. Sean $\{(X_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ espacios métricos y sea (X, d) el espacio métrico producto con d la distancia producto dada por

$$d\left((x_n), (y_n)\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}.$$

i) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{P}(X_n)$ base de X_n.
Definimos

$$\beta_k = \left\{ B_1 \times \cdots \times B_k \times \prod_{i>k} X_i : B_l \in \mathcal{B}_l \ \forall\ 1 \leq l \leq k \right\}.$$

Probar que $\mathcal{B} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \beta_k$ es una base de (X, d)

ii) Sea $\mathcal{S}_n \subseteq \mathcal{P}(X_n)$ subbase de X_n para cada $n \in \mathbb{N}$.
Definimos

$$\sigma_k = \left\{ X_1 \times X_2 \times \ldots X_{k-1} \times S_k \times \prod_{j>k} X_j : S_k \in \mathcal{S}_k \right\}.$$

Probar que $\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \sigma_k$ es una subbase de (X, d).

iii) Describir una base y una subbase de $\mathbf{n}^{\mathbb{N}} := \{f : \mathbb{N} \to \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}\}$, con la distancia

$$d\left(f, g\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{2^{n+1}} \delta(f(n), g(n)),$$

donde δ es la función δ de Dirac. Se sugiere interpretar $\mathbf{n}^{\mathbb{N}}$ como un espacio producto.

Ejercicio 5. Sean $\{(X_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ espacios métricos y sea (X, d) el espacio métrico producto con d la distancia producto dada por

$$d\left((x_n), (y_n)\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}.$$

i) Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}$, (X_n, d_n) es separable si y solo si (X, d) es separable.

ii) Deducir que $\mathbf{n}^{\mathbb{N}}$ es separable con la distancia producto del item iii del ejercicio anterior.

Ejercicio 6. Recordar que vimos que (ℓ^∞, d_∞) no es separable.

i) Sea $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} :$ existe n_0 tal que $a_n = 0$ siempre que $n \geq n_0\} \subseteq \ell^\infty$. Probar que $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ con la distancia de subespacio de (ℓ^∞, d_∞) es separable.

ii) Demostrar que $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ es denso en (ℓ^p, d_p) $1 \leq p < \infty$, pero no es denso en (ℓ^∞, d_∞).

iii) Concluir que (ℓ^p, d_p) es separable para $1 \leq p < \infty$.

Ejercicio 7. Sea (X, d) un espacio métrico separable. Probar que toda familia de subconjuntos de X no vacíos, abiertos y disjuntos dos a dos es a lo sumo numerable. Deducir que el conjunto de puntos aislados de X es a lo sumo numerable.

Ejercicio 8. Sean X, Y espacios métricos. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y suryectiva. Probar que si X es separable, entonces Y es separable.