Cardinalidad

Eugenio Borghini

Departamento de Matemática, Universidad de Buenos Aires.

27 de Agosto de 2018

Definiciones y resultados

Definición

Decimos que dos conjuntos A y B son equinumerables si existe una biyección $f : A \to B$. Notamos en ese caso $A =_c B$.

Definiciones y resultados

Definición

Decimos que dos conjuntos A y B son equinumerables si existe una biyección $f : A \to B$. Notamos en ese caso $A =_c B$.

Definición

Un conjunto es finito si es equinumerable al conjunto $\{i \in \mathbb{N} : i \leq n\}$ para algún $n \in \mathbb{N}_0$. Observar que el conjunto vacío es finito. Un conjunto es infinito si no es finito.

Definiciones y resultados

Definición

Sean A, B conjuntos. Decimos que A tiene cardinal menor o igual que B si existe una inyección $f : A \to B$. Notamos $A \leq_c B$.

Definiciones y resultados

Definición

Sean A, B conjuntos. Decimos que A tiene cardinal menor o igual que B si existe una inyección $f : A \to B$. Notamos $A \leq_c B$.

Definición

Decimos que un conjunto A es *numerable* o *contable* si A es finito o $A =_c \mathbb{N}$. En otras fuentes llaman a estos conjuntos *a lo sumo numerables*.

Definiciones y resultados

Definición

Sean A, B conjuntos. Decimos que A tiene cardinal menor o igual que B si existe una inyección $f : A \to B$. Notamos $A \leq_c B$.

Definición

Decimos que un conjunto A es *numerable* o *contable* si A es finito o $A =_c \mathbb{N}$. En otras fuentes llaman a estos conjuntos *a lo sumo numerables*.

Teorema (Cantor-Schröder-Bernstein)

Si $A \leq_c B$ y $B \leq_c A$, entonces $A =_c B$.

Definiciones y resultados

Definición

Sean A, B conjuntos. Decimos que A tiene cardinal menor o igual que B si existe una inyección $f : A \to B$. Notamos $A \leq_c B$.

Definición

Decimos que un conjunto A es *numerable* o *contable* si A es finito o $A =_c \mathbb{N}$. En otras fuentes llaman a estos conjuntos *a lo sumo numerables*.

Teorema (Cantor-Schröder-Bernstein)

Si $A \leq_c B$ y $B \leq_c A$, entonces $A =_c B$.

Resultado importante

Sea Γ un conjunto numerable. Supongamos que para cada $\gamma \in \Gamma$, A_γ es un conjunto numerable. Entonces, el conjunto $A := \cup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ es numerable.

Ejemplos

- $\mathbb{Z} =_c \mathbb{N}$.

Ejemplos

- $\mathbb{Z} =_c \mathbb{N}$.

Demostración.

Veremos que $\mathbb{Z} =_c \mathbb{N}_0$. La función $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$ definida por:

$$f(0) = 0, \ f(2n) = n, \ f(2n-1) = -n,$$

es claramente biyectiva. $\square$

Ejemplos

- $\mathbb{Z} =_c \mathbb{N}$.

Demostración.

Veremos que $\mathbb{Z} =_c \mathbb{N}_0$. La función $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$ definida por:

$$f(0) = 0,\ f(2n) = n,\ f(2n-1) = -n,$$

es claramente biyectiva. $\square$

- $\mathbb{Q} =_c \mathbb{N}$.

Ejemplos

- $\mathbb{Z} =_c \mathbb{N}$.

Demostración.

Veremos que $\mathbb{Z} =_c \mathbb{N}_0$. La función $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$ definida por:

$$f(0) = 0,\ f(2n) = n,\ f(2n-1) = -n,$$

es claramente biyectiva. $\square$

- $\mathbb{Q} =_c \mathbb{N}$.

Demostración.

Es claro que $\mathbb{N} \leq_c \mathbb{Q}$ pues $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$. Veremos $\mathbb{Q}_{>0} \leq_c \mathbb{N}$. Por factorización única, la aplicación $f : \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{N}$ dada por

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = 2^a 3^b, \text{ donde } (a:b) = 1,$$

es inyectiva. $\square$

Otra forma.

Es claro que $\mathbb{Q}$ es infinito. Veamos que es numerable. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$A_n = \left\{ \frac{m}{n} \ : \ m \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq \mathbb{Q}$$

es numerable. Como $\mathbb{Q} = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, vemos que $\mathbb{Q} =_c \mathbb{N}$. $\square$

Ejemplos

Otra forma.

Es claro que $\mathbb{Q}$ es infinito. Veamos que es numerable. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$A_n = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq \mathbb{Q}$$

es numerable. Como $\mathbb{Q} = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, vemos que $\mathbb{Q} =_c \mathbb{N}$. $\square$

- $\mathbb{N} \times \mathbb{N} =_c \mathbb{N}$.

Otra forma.

Es claro que $\mathbb{Q}$ es infinito. Veamos que es numerable. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$A_n = \left\{ \frac{m}{n} \, : \, m \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq \mathbb{Q}$$

es numerable. Como $\mathbb{Q} = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, vemos que $\mathbb{Q} =_c \mathbb{N}$. □

- $\mathbb{N} \times \mathbb{N} =_c \mathbb{N}$.

Demostración.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$A_n = \{(n, m) \, : \, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

es numerable. Luego $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ también lo es. □

Reconociendo conjuntos numerables

Ejercicio importante de la práctica

Sea $\mathcal{A}$ un alfabeto finito. El conjunto de palabras finitas que se pueden formar con letras de $\mathcal{A}$ es numerable.

Ejercicio importante de la práctica

Sea $\mathcal{A}$ un alfabeto finito. El conjunto de palabras finitas que se pueden formar con letras de $\mathcal{A}$ es numerable.

Veamos cómo se aplica este principio en varios ejemplos.

Reconociendo conjuntos numerables

Ejercicio importante de la práctica

Sea $\mathcal{A}$ un alfabeto finito. El conjunto de palabras finitas que se pueden formar con letras de $\mathcal{A}$ es numerable.

Veamos cómo se aplica este principio en varios ejemplos.

- $\mathbb{N}$ es numerable (¡ya sé que lo saben!).

Reconociendo conjuntos numerables

Ejercicio importante de la práctica

Sea $\mathcal{A}$ un alfabeto finito. El conjunto de palabras finitas que se pueden formar con letras de $\mathcal{A}$ es numerable.

Veamos cómo se aplica este principio en varios ejemplos.

- $\mathbb{N}$ es numerable (¡ya sé que lo saben!). En efecto, si tomamos como alfabeto $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, 9\}$, todo número natural se escribe como una palabra finita en $\mathcal{A}$.

Reconociendo conjuntos numerables

Ejercicio importante de la práctica

Sea $\mathcal{A}$ un alfabeto finito. El conjunto de palabras finitas que se pueden formar con letras de $\mathcal{A}$ es numerable.

Veamos cómo se aplica este principio en varios ejemplos.

- $\mathbb{N}$ es numerable (¡ya sé que lo saben!). En efecto, si tomamos como alfabeto $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, 9\}$, todo número natural se escribe como una palabra finita en $\mathcal{A}$.
- $\mathbb{Q}$ es numerable.

Reconociendo conjuntos numerables

Ejercicio importante de la práctica

Sea $\mathcal{A}$ un alfabeto finito. El conjunto de palabras finitas que se pueden formar con letras de $\mathcal{A}$ es numerable.

Veamos cómo se aplica este principio en varios ejemplos.

- $\mathbb{N}$ es numerable (¡ya sé que lo saben!). En efecto, si tomamos como alfabeto $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, 9\}$, todo número natural se escribe como una palabra finita en $\mathcal{A}$.
- $\mathbb{Q}$ es numerable. Si tomamos como alfabeto $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, 9, /, -\}$, todo número racional se corresponde con alguna palabra finita en $\mathcal{A}$.

Reconociendo conjuntos numerables

Ejercicio importante de la práctica

Sea $\mathcal{A}$ un alfabeto finito. El conjunto de palabras finitas que se pueden formar con letras de $\mathcal{A}$ es numerable.

Veamos cómo se aplica este principio en varios ejemplos.

- $\mathbb{N}$ es numerable (¡ya sé que lo saben!). En efecto, si tomamos como alfabeto $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, 9\}$, todo número natural se escribe como una palabra finita en $\mathcal{A}$.
- $\mathbb{Q}$ es numerable. Si tomamos como alfabeto $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, 9, /, -\}$, todo número racional se corresponde con alguna palabra finita en $\mathcal{A}$.
- Para $m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}^m$ es numerable.

Reconociendo conjuntos numerables

Ejercicio importante de la práctica

Sea $\mathcal{A}$ un alfabeto finito. El conjunto de palabras finitas que se pueden formar con letras de $\mathcal{A}$ es numerable.

Veamos cómo se aplica este principio en varios ejemplos.

- $\mathbb{N}$ es numerable (¡ya sé que lo saben!). En efecto, si tomamos como alfabeto $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, 9\}$, todo número natural se escribe como una palabra finita en $\mathcal{A}$.
- $\mathbb{Q}$ es numerable. Si tomamos como alfabeto $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, 9, /, -\}$, todo número racional se corresponde con alguna palabra finita en $\mathcal{A}$.
- Para $m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}^m$ es numerable. Tomamos como alfabeto $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, 9, ",", "(", ")"\}$.

- El conjunto de polinomios con coeficientes racionales $\mathbb{Q}[x]$ es numerable.

Reconociendo conjuntos numerables

- El conjunto de polinomios con coeficientes racionales $\mathbb{Q}[x]$ es numerable. El alfabeto que sirve acá es $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, 9, /, +, -, x, \hat{}\}$, donde $\hat{}$ indica exponenciar. Por ejemplo, $x^4 + 2x^2 = x\hat{}4 + 2x\hat{}2$.

- El conjunto de polinomios con coeficientes racionales $\mathbb{Q}[x]$ es numerable. El alfabeto que sirve acá es $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, 9, /, +, -, x, \hat{}\}$, donde $\hat{}$ indica exponenciar. Por ejemplo, $x^4 + 2x^2 = x\hat{}4 + 2x\hat{}2$.
- El conjunto de partes finitas de $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}_{fin} := \{X \subseteq \mathbb{N} : X \text{ es finito}\}$ es numerable.

Reconociendo conjuntos numerables

- El conjunto de polinomios con coeficientes racionales $\mathbb{Q}[x]$ es numerable. El alfabeto que sirve acá es $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, 9, /, +, -, x, \hat{}\}$, donde $\hat{}$ indica exponenciar. Por ejemplo, $x^4 + 2x^2 = x\hat{}4 + 2x\hat{}2$.
- El conjunto de partes finitas de $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}_{fin} := \{X \subseteq \mathbb{N} : X \text{ es finito}\}$ es numerable. En efecto, cada elemento de $\mathcal{P}_{fin}$ se puede describir como una palabra finita en $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, 9, ",", "\{", "\}"\}$.