Ejemplos

Ejercicio

Probar que $[0,1] =_c (0,1)$.

Ejemplos

Ejercicio

Probar que $[0,1] =_c (0,1)$.

Demostración.

Por Cantor-Bernstein, basta hallar dos inyecciones $f : (0,1) \to [0,1]$ y $g : [0,1] \to (0,1)$.

Ejemplos

Ejercicio

Probar que $[0, 1] =_c (0, 1)$.

Demostración.

Por Cantor-Bernstein, basta hallar dos inyecciones $f : (0, 1) \to [0, 1]$ y $g : [0, 1] \to (0, 1)$.

f está cantada, basta tomar la inclusión canónica. Para g, consideremos

$$\begin{aligned} g : [0,1] &\to (0,1) \\ x &\mapsto \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

$\square$

Ejemplos

Ejercicio

Probar que $[0,1] =_c (0,1)$ *sin utilizar Cantor-Bernstein.*

Ejercicio

Probar que $[0,1] =_c (0,1)$ *sin utilizar Cantor-Bernstein.*

Demostración

Si no podemos recurrir a Cantor-Bernstein, debemos dar una **biyección** explícita entre los conjuntos.

Ejemplos

Demostración

El problema de encontrar una biyección, justamente, es que nos "sobran" el 0 y el 1. Para eso habrá que "hacer espacio" de alguna manera.
Consideremos las sucesiones $a_n = \frac{1}{n+1}$ y Notar que a_n es decreciente e inyectiva.

Ejemplos

Demostración

El problema de encontrar una biyección, justamente, es que nos "sobran" el 0 y el 1. Para eso habrá que "hacer espacio" de alguna manera.
Consideremos las sucesiones $a_n = \frac{1}{n+1}$ y Notar que a_n es decreciente e inyectiva.
Vamos a 'mover' estas sucesionens hacia los extremos y con eso quedarán libres $a_1 = 1/2$ y $a_2 = 1/3$. Explícitamente,

$$f(x) := \begin{cases} a_{n+2} & \text{si } x = a_n, \\ 1/2 & \text{si } x = 1, \\ 1/3 & \text{si } x = 0, \\ x & \text{si no sucede nada de lo anterior.} \end{cases}$$

Notar que los elementos mapeados "fuera de las sucesiones" van a parar a sí mismos, solo habría que chequear biyectividad en los elementos involucrados en las sucesiones, el 0 y el 1.

Ejemplos

Demostración.

Una forma fácil (en este caso) de ver esto es decir explícitamente quién es la inversa: $f^{-1}(x) := \begin{cases} a_n & \text{si } x = a_{n-2} \text{ y n>2,} \\ 1 & \text{si } x = 1/2, \\ 0 & \text{si } x = 1/3, \\ x & \text{si no sucede nada de lo anterior.} \end{cases}$

Queda de ejercicio chequear que una es inversa de la otra (vale verlo a ojo). □

Ejercicio

Dar una biyección explícita entre $\mathbb{N}_0$ *y* $\mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Ejercicio

Dar una biyección explícita entre $\mathbb{N}_0$ *y* $\mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Demostración

Primeramente, recordemos que por el teorema fundamental de la aritmética, todo natural se puede escribir de manera única como producto de primos a potencias. Utilizaremos tales primos ordenados de manera natural. Además, cada racional irreducible puede escribirse de manera única como

$$\frac{a}{b} = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots$$

con todas las potencias igual a 0 salvo finitas (es importante que vamos a considerar los primos ordenados, o sea, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, etc.) y posiblemente negativas. Además, necesitamos la sucesión $(1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots)$. Solo porque queremos escribir una función explicita, vamos a escribir tal sucesión con una fórmula:

Demostración

$$a(n) = \begin{cases} (-1^n)\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Para cada elemento $m \in \mathbb{N}$, $m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots$, definimos

$$h(m) = \begin{cases} p_1^{a(r_1)} p_2^{a(r_2)} \ldots & \text{si } m > 0 \\ 0 & \text{si } m = 0 \end{cases}$$

Veamos que esta función es biyectiva. Para ello, explicitemos la inversa de $a(n)$:

$$a^{-1}(z) = \begin{cases} 2z - 1 & \text{si } z > 0 \\ -2z & \text{si } z < 0 \\ 0 & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Demostración.

Dado $x = p_1^{r_1} \ldots$ con $r_i \in \mathbb{Z}$, todos 0 salvo finitos (es decir, $x \in \mathbb{Q} - \{0\}$), definimos:

$$h^{-1}(x) = \begin{cases} p_1^{a^{-1}(r_1)} p_2^{a^{-1}(r_2)} \ldots & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

$\square$