

## PRÁCTICA 3: INTEGRAL DE LEBESGUE

**Ejercicio 1.** Sea  $f$  definida sobre  $\mathbb{R}^n$ , medible y no negativa. Probar que si  $E$  es medible entonces

$$\int_E f = \sup \left\{ \int_E \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq f, \quad \varphi \text{ simple} \right\}.$$

**Ejercicio 2.** Sean  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  medible,  $v \in \mathbb{R}^n$  y  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  medible.

(a) Probar que si  $f \geq 0$  entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x+v)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$$

Concluir que

$$\int_E f(x+v)dx = \int_{E+v} f(x)dx$$

(b) Si  $f$  es integrable sobre  $\mathbb{R}^n$ , valen para  $f$  las mismas afirmaciones.

**Ejercicio 3.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  integrable. Probar que para todo  $a > 0$  vale

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{x}{a}\right) dx = a^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx.$$

**Ejercicio 4.** Sea  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  integrable. Probar que si  $|\int_E f dx| = \int_E |f| dx$ , entonces  $f \geq 0$  a.e. en  $E$  ó  $f \leq 0$  a.e. en  $E$ .

**Ejercicio 5.** Sea  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  medible tal que  $\int_A f dx = 0$  para todo conjunto medible  $A \subseteq E$ . Probar que  $f = 0$  a.e. en  $E$ .

**Ejercicio 6.** Sea  $(f_n)_{n \geq 1}$  una sucesión de funciones integrables sobre  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  y sea  $f$  integrable sobre  $E$ . Probar que si  $\int_E |f_n - f| dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , entonces  $f_n \xrightarrow{m} f$  sobre  $E$ . ¿Vale la recíproca?

**Ejercicio 7.**

(a) Sea  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  integrable. Probar que existe  $(x_n)_{n \geq 1}$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0.$$

(b) Mostrar que existe  $g$  integrable sobre  $[0, +\infty)$ , continua y tal que para una sucesión  $(x_n)_{n \geq 1}$ , se verifica que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \infty.$$

**Ejercicio 8.** Sea  $f$  integrable sobre  $\mathbb{R}^n$  y  $Q_k = [-k, k]^n$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Probar que

$$\int_{Q_k^c} |f| dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

**Ejercicio 9.**

- (a) Sean  $E_1, E_2, \dots, E_n$  conjuntos medibles contenidos en el intervalo  $[0, 1]$ . Si para cada  $x \in [0, 1]$ , el conjunto  $A_x = \{k : 1 \leq k \leq n \text{ y } x \in E_k\}$  tiene por lo menos  $q$  elementos, probar que existe  $k$  tal que  $1 \leq k \leq n$  y  $|E_k| \geq \frac{q}{n}$ .
- (b) Sea  $(E_n)_{n \geq 1}$  una sucesión de conjuntos medibles de  $\mathbb{R}^m$  y  $k \in \mathbb{N}$ . Probar que si  $G = \{x \in \mathbb{R}^m : x \in E_n \text{ para al menos } k \text{ valores de } n\}$ , entonces  $G$  es medible y  $k|G| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |E_n|$ .

**Ejercicio 10.** Mostrar que en el Lema de Fatou la desigualdad puede ser estricta.

**Ejercicio 11.** Mostrar que en el Lema de Fatou, la hipótesis de que las funciones de la sucesión sean no negativas, es necesaria.

**Ejercicio 12.** Sea  $(f_k)_{k \geq 1}$  una sucesión de funciones medibles no negativas definidas sobre  $E$ . Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$  para cada  $x \in E$  y  $f_k \leq f$  a.e., probar que

$$\int_E f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_k.$$

**Ejercicio 13.**

- (a) Sea  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  medible y sea  $(f_k)_{k \geq 1}$  una sucesión decreciente de funciones medibles y no negativas sobre  $E$  con  $f_1 \in L^1(E)$ . Mostrar que

$$\int_E \lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k < \infty.$$

- (b) Sea  $x \in \mathbb{R}_{>1}$  mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(x^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln x$$

considerando la función  $f_n(t) = t^{\frac{1}{n}-1}$  para  $1 < t < x$ .

**Ejercicio 14.** Si  $f \in L^1(0, 1)$ , mostrar que  $x^n f(x) \in L^1(0, 1)$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$  y

$$\int_0^1 x^n f(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

**Ejercicio 15.** Mostrar que el Teorema de Convergencia Mayorada es válido para funciones a valores complejos.

**Ejercicio 16.** Usar el Teorema de Egorov para probar el Teorema de Convergencia Mayorada.

**Ejercicio 17.** Probar que para cada  $g \in L^1([0, \infty))$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^n xg(x)dx = 0.$$

**Ejercicio 18.** Sean  $(f_n)_{n \geq 1}$  una sucesión de funciones medibles sobre  $\mathbb{R}^m$  y  $g$  integrable sobre  $\mathbb{R}^m$  tales que  $|f_n| \leq g$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Sea  $f$  una función tal que  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  a.e. Probar que para todo  $a > 0$ , si llamamos  $E_k = \bigcup_{n \geq k} \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq a\}$  para  $k \in \mathbb{N}$ ,

entonces  $\lim_{k \rightarrow \infty} |E_k| = 0$ . Deducir que  $f_n \xrightarrow{m} f$ .

**Ejercicio 19.** Sea  $g(x) = x^2 \sin(1/x^2)$ , definida en  $(0, 1)$  y  $f$  su derivada. Probar que  $f$  es continua en  $(0, 1)$ , existe  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^1 f(x)dx$ , pero  $f \notin L^1(0, 1)$ .

**Ejercicio 20.** Sea  $(f_n)_{n \geq 1}$  una sucesión de funciones integrables sobre  $E \subseteq \mathbb{R}^m$  tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| dx < \infty,$$

Probar que  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge absolutamente en casi todo punto de  $E$  y

$$\int_E \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n dx.$$

**Ejercicio 21.** Sean  $f_n : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}; f_n(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n$ . Probar que

$$\int_{(0,1)} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \neq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(0,1)} f_n.$$

Verificar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{(0,1)} |f_n| = \infty.$$

**Ejercicio 22.** Sean  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  medible y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  medible. Para cada  $n \in \mathbb{N}$  consideramos  $E_n = \{x \in E : |f(x)| \geq n\}$ .

(a) Probar que si  $f$  integrable sobre  $E$ , entonces  $\sum_{n \geq 1} |E_n| < \infty$ .

(b) Probar que si  $E$  es de medida finita y  $\sum_{n \geq 1} |E_n| < \infty$  entonces  $f$  es integrable sobre  $E$ .

**Ejercicio 23.** Sea  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  medible,  $g(x) \geq 0$  para casi todo  $x \in [0, 1]$  e integrable sobre  $[0, 1]$ . Probar que si existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$ , vale la igualdad

$$\int_0^1 g(x)^n dx = \alpha,$$

entonces  $g = \chi_E$  a. e. para algún conjunto  $E \subseteq [0, 1]$  medible.

**Ejercicio 24.** Sean  $(f_n)_{n \geq 1}$  una sucesión de funciones integrables sobre  $E$  y  $f$  medible tales que  $f_n \xrightarrow{m} f$  sobre  $E$ . Si existe  $g$  integrable sobre  $E$  tal que  $|f_n| \leq g$  sobre  $E$ , entonces  $f$  es integrable y  $\int_E |f_n - f| dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

**Ejercicio 25.** Sea  $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

1. para todo  $x \in [0, 1]$ , la función  $y \mapsto f(x, y)$  es integrable sobre  $[0, 1]$  y
2.  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  es una función de  $(x, y)$  acotada.

Probar que

- (a) para todo  $x \in [0, 1]$ , la función  $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  es medible y
- (b)  $\frac{d}{dx} \int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy$ .