CLASE PÚBLICA DEL 24/08

MARTÍN MANSILLA

El objetivo de esta clase será entender las homografías, ciertas funciones de variable compleja de importancia por sus propiedades geométricas y su carnal relación con la descripción esférica $\mathbb{C}$ o su versión ampliada $\widehat{\mathbb{C}}$.

Una homografía es una función de la forma

$$\begin{aligned} H : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \end{aligned}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ de forma que $ad - bc \neq 0$. Estas funciones son llamadas en la literatura también como transformaciones de Möbius o transformaciones lineales fraccionales (traducido del inglés linear fractional transformations).

Pregunta 1. ¿Por qué pedimos la condición $ad - bc \neq 0$?

Veamos que sin esa condición la función H pierde toda su gracia. Si fuera $ad - cb = 0$ se tiene entonces hay dos casos que considerar:

(1) $d \neq 0$.
(2) $d = 0$.

En el primer caso se tiene que $a = \frac{cb}{d}$, y luego tenemos

$$H(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{cb}{d}z+b}{cz+d} = \frac{b}{d}\frac{cz+d}{cz+d} = \frac{b}{d},$$

para todo $z \neq -\frac{d}{c}$. En el segundo caso queda de ejercicio para la lectora comprometida observar que la conclusión es la misma.

Pregunta 2. ¿Hay algún problema con esa definición?

Si $c = 0$ tenemos que H es una función lineal de la vieja escuela, en este caso no hay mucho conflicto. Por otro lado si $c \neq 0$ el valor $z_0 = \frac{-d}{c}$ anula el denominador en $\frac{az+b}{cz+d}$ con lo cual así como está todo no queda bien definida H. Hay dos formas de solucionar este problema:

(1) Si $c \neq 0$ definir

$$\begin{aligned} H : \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{-d}{c} \right\} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{az+b}{cz+d}. \end{aligned}$$

(2) Definir en general H en el plano complejo ampliado

$$\begin{aligned} H : \widehat{\mathbb{C}} &\to \widehat{\mathbb{C}} \\ z &\mapsto \frac{az+b}{cz+d}. \end{aligned}$$

Iremos por la segunda opción, pero ¿Cómo queda ahora definida esta nueva función? ¿por qué resuelve nuestros problema? ¿será contínua?

Queda por definir H en los puntos conflictivos. Observemos para una sucesión $(z_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ tal que $z_n \to -\frac{d}{c}$, como $ad - cb \neq$, tenemos

$$\frac{az_n + b}{cz_n + d} \to \infty,$$

por ejemplo por que su módulo tiende a infinito. Si queremos que esa función resulte contínua debemos definir $H(-d/c) = \infty$. De modo similar si $(z_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$ tal que $z_n \to \infty$ vale que

$$\frac{az_n + b}{cz_n + d} = \left(\frac{z_n}{z_n} \right) \frac{a + b/z_n}{c + d/z_n} \to \frac{a}{c},$$

definimos entonces $H(\infty) = a/c$.

Notaremos $\mathcal{H}$ al conjunto de las hmografías en $\widehat{\mathbb{C}}$. Enumeramos a continuación algunas propiedades útiles de las homografías que cuya demostración queda a cargo de la lectora.

(1) La composición de homografías es una homografía.
(2) Dada $H \in \mathcal{H}$ con fórmula $H(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ existe $H^{-1} \in \mathcal{H}$ y su fórmula es $H^{-1}(z) = \frac{dz-d}{-cz+a}$.
(3) para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$ vale que

$$H = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{(\lambda a)z + (\lambda b)}{(\lambda c)z + (\lambda d)}.$$

Existe una relación muy fructífera entre las homografías y las matrices de $\mathbb{C}^{2\times 2}$ inversibles. Si bien puede ser llamativa este vínculo en primer momento hay ciertos indicios que deberían hacerla natural. Para ser más precisos digamos que dada $H \in \mathcal{H}$ con fórmula $H(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ diremos que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es una matriz asociada a H y lo notaremos $H \sim A$. Gracias a la propiedad (3) es fácil ver que cualquier si $H \sim A$ entonces para cualquier $\lambda \neq 0$ vale que $H \sim \lambda \cdot A$. Además gracias a que $ad - bc \neq 0$ las matrices asociadas a una homografía son inversibles.

Ejercicio 3. Si $H_1 \sim A$ y $H_2 \sim B$ entonces $H_1 \circ H_2 \sim A \cdot B$.

Hay tres tipos de homografía que resaltan entre las demás por ser los ladrillos fundamentales para construir todas (del mismo modo que los números primos resaltan entre los naturales). Estas son

- Las traslaciones: $T(z) = z + z_0$ para cierto $z_0 \in \mathbb{C}$.
- Las dilataciones: $D(z) = az$ para cierto $a \in \mathbb{C} \setminus \{0_{\mathbb{C}}\}$.
- La inversión: $I(z) = z^{-1}$.

Observemos que si $T(z) = z + z_0$, $D(z) = az$ entonces $T^{-1}(z) = z - z_0$, $D^{-1}(z) = a^{-1}z$ y que $I^{-1} = I$.

Existen algunas otras clases de Homografías con algo menos de importancia pero que de todas formas vale la pena mencionar. En primer lugar, las rotaciones que son un subconjunto de dilataciones de la forma $R(z) = e^{i\theta}z$ con cierto ángulo fijo $\theta \in [o, 2\pi)$. En segundo lugar las homotecias, que tienen la forma $H(z) = a(z - z_0) + z_0$ para cierto $a \in CC$ al que llamaremos razón y $z_0 \in \mathbb{C}$ al que llamaremos centro. Observemos que la homotecia de razón a y centro z_0 podemos descomponerla como $H = T \circ D \circ T^{-1}$ donde $T(z) = z + z_0$ y $D(z) = az$.

Pregunta 4. ¿Puede una homografía dejar puntos fijos? ¿Cuántos?

La pregunta anterior puede resultar rara y hasta parecer ingenua pero veremos que su respuesta será una herramienta crucial más adelante. Empecemos por analizar los casos de las familias destacadas que recién nombramos.

Para empezar recordemos que un punto fijo en el caso de las homografías en particular. Un cierto $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ será un punto fijo de $H \in \mathcal{H}$ si $H(z) = z$.

<u>Traslaciones</u>: sea $T(z) = z + z_0$ para cierto $z_0 \in \mathbb{C}$. En primer lugar observemos que $T(\infty) = \infty$ con lo cual ∞ es un punto fijo de T. Por otro lado si pretendemos $T(z) = z$ para $z \in \mathbb{C}$ esto implica $z + z_0 = z$ que solo será cierto si $z_0 = 0$, en cuyo caso T es la identidad y todos los puntos son fijos.

<u>Dilataciones</u>: sea $D(z) = az$ para cierto $a \in \mathbb{C} \setminus \{0_{\mathbb{C}}\}$. En este caso también vale que ∞ es punto fijo de D, es fácil ver que $0_{\mathbb{C}}$ también lo es.

<u>Inversiones</u>: En este caso si $I(\infty) = 0$ y $I(0) = \infty$ con lo cual el infinito no es más un punto fijo. Al plantear $z^{-1} = I(z) = z$ conseguimos $z^2 = 1$ cuyas soluciones son $\{-1, 1\}$, únicos puntos fijos de I.

Esto da una cierta idea para probar el siguiente teorema.

Teorema 5. Si $H \in \mathcal{H}$ tiene más de dos puntos fijos entoces es la identidad. Más aún, si ∞ es punto fijo entonces H es lineal.

Proof. Sea $H \in \mathcal{H}$ con fórmula $H(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

Si ∞ es un punto fijo, por ser biyectiva H sobre $\widehat{\mathbb{C}}$, significa que $H : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ esta bien definida restringiendo H a $\mathbb{C}$ con lo cual $cz + d \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ lo cual es cierto solo si $d \neq 0$ y $c = 0$. En este caso tenemos $H(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$. Ahora si $z \in \mathbb{C}$ es otro punto fijo tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} &= z \\ \left(\frac{a}{d} - 1\right) z + \frac{d}{d} &= 0, \end{aligned}$$

si hay más de una solución a esa ecuación, por ser las raíces de un polinomio de grado 1 tiene que ser el polinomio 0 y sus coeficientes serán 0. Tenemos así que H es la identidad o que tiene solo dos puntos fijos (∞ y uno solo en $\mathbb{C}$).

Si ∞ no si $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ es punto fijo debe valer

$$\begin{aligned} \frac{az+b}{cz+d} &= z \\ az + b &= cz^2 + dz \\ 0 &= cz^2 + (d-a)z + b. \end{aligned}$$

Con el mismo argumento que antes, si las soluciones de esa ecuación son más que dos entonces $c = 0$ $d - a = 0$ y $b = 0$, lo cual dice que H es la identidad. $\square$

Ejercicio 6. Si $H \in \mathcal{H}$ tiene a ∞ y 0 de puntos fijos entonces H es una dilatación.

El siguiente teorema jerarquiza a las familias antes destacadas de homografías como los ladrillos fundamentales.

Teorema 7. Toda homografía es una composición de traslaciones, dilataciones e inversiones.

La anterior proposición no la probaremos acá. Observemos de todos modos que si conseguimos probar alguna propiedad para esas tres familias fundamentales de homografías que además se conserve por composición conseguiremos probarla para todas las homografías gracias a la Propocioón 7. Este es el caso de una de las propiedades geométricas más interesantes de las homografías, que enunciamos en la siguiente proposición

Teorema 8. La imagen de una recta o circunferencia por una homografía es una recta o un circunferencia.

Para referirnos a un objeto que puede ser curva o circunferencia usaremos el término *”circunferrecta”*. Lo que sigue en azul es un extracto del apunte sobre la clase del 19/08 donde se habla de estos objetos.

Será interesante considerar ahora la noción de *“circunferrecta”* que es una generalización que incluye a las circunferencias y las rectas y, como veremos luego, tiene mucho sentido entender como un objeto en sí mismo. Diremos que un conjunto $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$ es un *“circunferrecta”* si tiene existen $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ la siguiente descripción

$$\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : A \cdot \mathrm{Re}(z) + B \cdot \mathrm{Im}(z) + C \cdot |z|^2 + D = 0\}.$$

Observemos que

- Si $C = 0$ resulta que $\mathcal{C}$ es una recta.
- Si $C \neq 0$ y $4CD \geq A^2+B^2$ resulta que $\mathcal{C}$ es una circunferencia de radio $r = \sqrt{\frac{1}{4C^2}(A^2 + B^2) - \frac{D}{C}}$ y centro $z_0 = -\frac{1}{2C}(A + iB)$ (si $r = 0$ es tan solo $\{z_0\}$).
- Si $C \neq 0$ y $4CD < A^2 + B^2$ entonces $\mathcal{C} = \emptyset$.

Agreguemos un análisis útil en este caso. Observemos que enrealidad los párametros que definen una *“circunferrecta”*, si bien parecen cuatro, son tres. Esto es así por que si todos son 0 el conjunto se degenera y no tiene sentido, con lo cual, aquel parámetro no nulo que tiene que existir podemos reemplazarlo por 1 si a todos los parámetros los dividimos por su valor. El conjunto será el mismo por que está determinado por una ecuación que de un lado del igual tiene un 0.

Luego si conocemos tres puntos de una *“circunferrecta”* podremos determinar cual es, ya que reemplazando los valores en la ecuación que deben cumplir conseguimos tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. Se deduce de este razonamiento que una *“circunferrecta”* queda determinada por tres puntos.

Lo que está en violeta intenta justificar que en el $\widehat{\mathbb{C}}$ las *“circunferrectas”* que tienen al ∞ son las viejas y queridas rectas.

Las circunferencias están acotadas en $\mathbb{C}$ y en cambio dentro de $\mathbb{C}$ las rectas tienen elementos tan cercanos a ∞ como queramos. De ser necesaria una argumentación más fina la charlamos.

El Teorema 8 es un resultado teórico que dice mucho sobre como transforman las geometrías de $\mathbb{C}$ las homografías pero será interesante tener alguna estrategía para saber responder a las siguientes preguntas:

Pregunta 9. Dada una *“circunferrecta”* $\mathcal{C}$ y una homografía H ¿Quién es $H(\mathcal{C})$?

Pregunta 10. Dadas dos emph“circunferrectas” $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ ¿Qué homografía H cumple $H(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$?

Para responder a la Pregunta 9 estudiemos un ejemplo.

Ejemplo 11. Dada la homografía H con fórmula $H(z) = \frac{2z+i}{iz-1}$, la circunferencia de centro $0_{\mathbb{C}}$ y radio $1/2$ $C_{1/2}(0_{\mathbb{C}})$ y el disco abierto con mismos centro y radio $\mathbb{D}_{1/2}(0_{\mathbb{C}})$. Calcular $H(C_{1/2}(0_{\mathbb{C}}))$ y $H(D_{1/2}(0_{\mathbb{C}}))$.

Solución: Gracias al Teorema 8 sabemos que $H(C_2(0_{\mathbb{C}}))$ será una *"circunferrecta"*, con lo cuál para ciertos parámetros A, B, C, D vale que

$$H(C_2(0_{\mathbb{C}})) = \{z \in \mathbb{C} : A \cdot \operatorname{Re}(z) + B \cdot \operatorname{Im}(z) + C \cdot |z|^2 + D = 0\},$$

basta ver quienes son esos parámetros y como entender entonces de que objeto concreto hablamos.

Observemos que en este caso hay un elemento en $C_{1/2}(0_{\mathbb{C}})$ que vía H va a parar a un punto muy querido, por tener la bondad de simplicar notablemente nuestros cálculos. El punto $-\frac{i}{2} \in C_{1/2}(0_{\mathbb{C}})$ y $H(-\frac{i}{2}) = 0$. Sabemos entonces que $0 \in H(C_{1/2}(0_{\mathbb{C}}))$ y reemplazando en la ecuación de *"circunferrecta"* conseguimos que $D = 0$.

Por otro lado $H(-i) = \infty$ y $-i \notin C_{1/2}(0_{\mathbb{C}})$ con lo cuál sabemos que $H(C_{1/2}(0_{\mathbb{C}}))$ será efectivamente un círculo. Mirando la caracterización escrita en azul deducimos que $C \neq 0$ y dividiendo por C conseguimos ver que

$$H(C_2(0_{\mathbb{C}})) = \{z \in \mathbb{C} : \tilde{A} \cdot \operatorname{Re}(z) + \tilde{B} \cdot \operatorname{Im}(z) + |z|^2 = 0\},$$

con $\tilde{A} = A/C, \tilde{B} = B/C$. Como $1/2, i/2 \in C_2(0_{\mathbb{C}})$, y

$$H(1/2) = -\frac{2}{5} - \frac{6}{5}i$$
$$H(i/2) = -\frac{4}{3}i,$$

entonces $-\frac{2}{5} - \frac{6}{5}i, -\frac{4}{3}i \in \{z \in \mathbb{C} : \tilde{A} \cdot \operatorname{Re}(z) + \tilde{B} \cdot \operatorname{Im}(z) + |z|^2 = 0\}$. Evaluando conseguimos

$$\begin{cases} -\tilde{B}\frac{4}{3} + \frac{16}{9} & = 0 \\ -\tilde{A}\frac{2}{5} - \tilde{B}\frac{6}{5} + \frac{8}{5} & = 0 \end{cases},$$

con lo cual $\tilde{A} = 0, \tilde{B} = 4/3$. Con lo cuál $H(C_{1/2}(0_{\mathbb{C}}))$ es el círculo de centro $z_0 = -i4/3$ y radio $r = \frac{4}{3}$.

Por último para saber quien es $H(\mathbb{D}_{1/2}(0_{\mathbb{C}}))$, como las homografías son contiínuas en $\widehat{\mathbb{C}}$ mandan convexos en convexos. El círculo $C_{1/2}(0_{\mathbb{C}})$ es justo el borde de $\mathbb{D}_{1/2}(0_{\mathbb{C}})$ y $\widehat{\mathbb{C}} \setminus C_{1/2}(0_{\mathbb{C}})$ tiene solo dos componentes conexas una de las cuales es $\mathbb{D}_{1/2}(0_{\mathbb{C}})$. Como H es biyectiva vale que

$$H(\widehat{\mathbb{C}} \setminus C_{1/2}(0_{\mathbb{C}})) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus H(C_{1/2}(0_{\mathbb{C}})) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus C_{4/3}(-i4/3),$$

que también tiene solo dos componentes convexas: $\mathbb{D}_{4/3}(-i4/3)$ y su complemento. Basta decidir cual de las dos es la imagen de $\mathbb{D}_{1/2}(0_{\mathbb{C}})$ o la de su complemento. Como $-i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_{1/2}(0_{\mathbb{C}})$ y $H(-i) = \infty$ eso decide $H(\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_{1/2}(0_{\mathbb{C}}))$ es el complemento de $\mathbb{D}_{4/3}(-i4/3)$ con lo cual

$$H(\mathbb{D}_{1/2}(0_{\mathbb{C}})) = \mathbb{D}_{4/3}(-i4/3).$$

El teorema que sigue será la el martillo con el que machacaremos sobre la Pregunta 10.

Teorema 12. Dados $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ diferentes, si $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$ cumplen

$$H_1(z_1) = H_2(z_1), H_1(z_2) = H_2(z_2), H_1(z_3) = H_2(z_3),$$

entonces $H_1 = H_2$.

El Teorema 12 puede leerse así: *"Una homografía queda definida por su valor en tres puntos"*.

La demostración del Teorema 12 queda como ejercicio para la lectora audaz (<u>Sugerencia:</u> *estudiar la cantidad de puntos fijos de la homografía* $H_1^{-1} \circ H_2$).

Esto no asegura que existe una única $H \in \mathcal{H}$ tal que, dados $z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ distintos, se tiene

$$H(z_2) = 1, H(z_3) = 0, H(z_4) = \infty.$$

La forma general de esta homografía depende de z_2, z_3, z_4 y se describe así

- Si $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ entonces $H(z) = \left(\frac{z-z_3}{z-z_4}\right)\left(\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right)$.
- Si $z_2 = \infty$ entonces $H(z) = \frac{z-z_3}{z-z_4}$.
- Si $z_3 = \infty$ entonces $H(z) = \frac{z_2-z_3}{z-z_4}$.
- Si $z_4 = \infty$ entonces $H(z) = \frac{z-z_3}{z_2-z_3}$.

Notaremos a esta homografía única que depende de $z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ así $H(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$.

Así Dados cualquier par de ternas de números $z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ distintos entre sí y $w_2, w_3, w_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ distintos entre sí podremos conseguir la única $H \in \mathcal{H}$ que cumple

$$H(z_2) = w_2, H(z_3) = w_3, H(z_4) = w_4,$$

como $H = (z, w_2, w_3, w_4)^{-1} \circ (z, z_2, z_3, z_4)$. Podemos pensar que de alguna manera estamos usando los puntos $1, 0, \infty$ como pivote para conectar en parejas de forma adecuada a los $z's$ (zetas) y $w's$ (dobleves).

Una interpretación geométrica de esta estrategia abstracta nace de recordar que tres puntos $z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ distintos entre sí determinan una *"circunferrecta"*. Así la homograía $(z, z_2, z_{3,4})$

manda dicha *"circunferrecta"* en la recta de eje real (que posee los puntos $1, 0, \infty$). Luego La homografía que cumple

$$H(z_2) = w_2, H(z_3) = w_3, H(z_4) = w_4,$$

está compuesta por aquella que manda la *"circunferrecta"* determinada por z_2, z_3, z_4 en la recta real y la que manda la recta real en la *"circunferrecta"* determinada por w_2, w_3, w_4.

Veamos como funciona esto en un ejemplo y observemos también como usamos la maquinaria que nos brinda la conexion entre homografías y matrices inversibles.

Ejemplo 13. Encontrar la homografía que mande la circunferencia de centro $4i$ y radio 3 en la recta $L = \{t(1+i) - 2 : t \in \mathbb{R}$

Solución:

La idea será encontrar la homografías T y S que manden ambas geometrías en el eje real y luego componer adecuadamente.

Observemos que L contiene en $\widehat{\mathbb{C}}$ a los puntos $2i, -2, \infty$. Consideremos $T \in \mathcal{H}$ la que cumple

$$T(2i) = 1, T(-2) = 0, T(\infty) = \infty,$$

es decir

$$T(z) = (z, 2i, -2, \infty) = \frac{z-2}{2i-2}.$$

Gracias al Teorema 8 sabemos que $T(L)$ será una *"circunferrecta"* y como $T(\infty) = \infty \in T(L)$ sabemos que es una recta. Más aún, por saber que $T(2i) = 1, T(-2) = 0 \in T(L)$ no queda más opción para $T(L)$ que ser la recta real.

Por otra parte los puntos $i, 7i, 3+4i$ están en la circunferencia de centro $4i$ y radio 3 a la que llamaremos $\mathcal{C}$. Sea $S \in \mathcal{H}$ la que cumple

$$S(i) = 1, S(7i) = 0, S(3+4i) = \infty,$$

es decir $S(z) = (z, i, 71, 3+4i) = \frac{z-7i}{z-(3+4i)} \frac{i-7i}{i-(3+4i)}$. Como $\frac{i-7i}{i-(3+4i)} = 1+i$ entonces

$$S(z) = \frac{(1+i)z + 7(1-i)}{z-(3+4i)},$$

y con el mismo argumento usado para T $S(\mathcal{C})$ es la recta dada por el eje real.

Calculemos T^{-1}, y hagamoslos de dos formas. La primera y sencilla si gozamos de buena memoria es usar la fórmula para la inversa de una homografía (que tiene todo que ver con la fórmula para la inversa de una matriz de 2), así obtenemos

$$T^{-1}(z) = \frac{-2z+2}{-2i+1}.$$

Podemos también pensar en la matriz asociada a T $A_T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2i & -2 \end{pmatrix}$, invertirla usando la regla de cramer y así conseguir

$$A_T^{-1} = \frac{1}{\det(A_T)} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2i & 1 \end{pmatrix},$$

y luego sabiendo que $\det(A_T) \neq 0$ tenemos que $T^{-1} \sim \det(A_T)A_T^{-1}$ para llegar a la misma fórmula. Lo bueno de este camino es que conseguimos

$$T^{-1} \sim \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2i & 1 \end{pmatrix},$$

que es lo que realmente queremos. Así la homografía que buscamos será

$$S \circ T^{-1} \sim \begin{pmatrix} (1+i) & 7(1-i) \\ 1 & -(3-4i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16(1+i) & 9-5i \\ 6(1+i) & -1+4i \end{pmatrix},$$

por lo tanto $H(z) = \frac{-16(1+i)z+9-5i}{6(1+i)z-1+4i}$ cumple lo que queremos.