

## Práctica 8: Integración

---

### Integración en una variable (repaso)

1. Calcular:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int x \operatorname{sen} x \, dx. & \text{(c)} \int x e^{x^2} \, dx. & \text{(e)} \int \frac{3x - 2}{x^2 + x - 2} \, dx. \\ \text{(b)} \int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx. & \text{(d)} \int e^x \operatorname{sen} x \, dx. & \text{(f)} \int \ln x \, dx. \end{array}$$

2. Hallar el área encerrada por las curvas:

- (a)  $y = x^3$  e  $y = x$ .
- (b)  $y = x^3 - x$  y la recta tangente a esta curva en  $x = -1$ .
- (c)  $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$  y la recta  $y = 12$  entre  $x = 0$  y  $x = 3$ .
- (d)  $y = \operatorname{sen} x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2\pi$ .

3. (a) Calcular  $\int_{-2}^0 e^x \, dx$ .

- (b) Hallar el área encerrada por las curvas:  $y = 0$ ,  $y = -2$ ,  $y = \log x$  y  $x = 0$ .  
Sugerencia: Dibujar la región y usar a).

4. Calcular:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \int_{-2}^3 x^2 - 1 \, dx. & \text{(c)} \int_{-2}^3 |x^2 + 1| \, dx. \\ \text{(b)} \int_{-2}^3 |x^2 - 1| \, dx. & \text{(d)} \int_1^4 \sqrt{|x - 3|} \, dx. \end{array}$$

### Integrales impropias

5. (a) Para todos los valores reales de  $p > 0$ , estudiar la convergencia o divergencia de las integrales:

$$\text{i. } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} \, dx \quad \text{ii. } \int_0^1 \frac{1}{x^p} \, dx \quad \text{iii. } \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p} \, dx$$

*Observación:* Dividir los valores de  $p$  de la siguiente manera:  $0 < p < 1$ ,  $p = 1$  y  $p > 1$ .

- (b) Relacionar los resultados obtenidos con el hecho de que para  $x > 0$ ,  $x^{-p}$  y  $x^{-\frac{1}{p}}$  son funciones inversas y, por lo tanto, el gráfico de una es el de la otra reflejado respecto de la recta  $y = x$ .
- (c) ¿Para qué valores de  $p > 0$  la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  converge? En otras palabras, ¿para qué valores de  $p > 0$  el límite  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^p}$  es finito?

6. Analizar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} & \text{(e)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} & \text{(i)} \int_{-1}^3 \frac{dx}{(1-x)^3} \\
 \text{(b)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & \text{(f)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9} & \text{(j)} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2+\cos x} dx \\
 \text{(c)} \int_0^{+\infty} e^{-kx} dx & \text{(g)} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} & \text{(k)} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen}(2x) dx \\
 \text{(d)} \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx & \text{(h)} \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^5}} dx & \text{(l)} \int_0^4 \frac{x}{x^2-4} dx \\
 & & \text{(m)} \int_1^2 \frac{e^x}{\sqrt{-x^3+3x^2-2x}} dx
 \end{array}$$

En los ítems *i*), *k*) y *l*) estudiar, además, el valor principal.

7. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

- (a) Si  $f$  es continua y positiva tal que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a > 0$ , entonces  $\int_0^{+\infty} f(x) dx = +\infty$
- (b) Si  $f$  es continua y positiva tal que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a > 0$ , entonces  $\int_0^{-\infty} f(x) dx = -\infty$
- (c) Si  $f$  es continua y decreciente con  $\int_4^{+\infty} f(x) dx = 3$ , entonces el  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .
- (d) Si  $f$  es una continua y positiva con  $\int_4^{+\infty} f(x) dx = 8$ , entonces el  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .
- (e) Si  $f$  es continua y positiva con  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , entonces  $\int_0^{+\infty} f(x) dx < +\infty$ .

8. Para los distintos valores de  $p \in \mathbb{R}$  analizar la convergencia de

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p(1+x^2)}.$$

## Integrales dobles

9. Evaluar cada una de las integrales siguientes si  $R = [0, 1] \times [0, 1]$ :

- (a)  $\iint_R (x^3 + y^2) dx dy.$  (e)  $\iint_R (x^m y^n) dx dy,$  donde  $m, n > 0.$
- (b)  $\iint_R y e^{xy} dx dy.$  (f)  $\iint_R (ax + by + c) dx dy.$
- (c)  $\iint_R (xy)^2 \cos x^3 dx dy.$  (g)  $\iint_R \text{sen}(x + y) dx dy.$
- (d)  $\iint_R \ln[(x + 1)(y + 1)] dx dy.$  (h)  $\iint_R (x^2 + 2xy + yx^{1/2}) dx dy.$

10. Calcular el volumen del sólido acotado por el plano  $xz$ , el plano  $yz$ , el plano  $xy$ , los planos  $x = 1$  y  $y = 1$ , y la superficie  $z = x^2 + y^4$ .

11. Sean  $f$  y  $g$  dos funciones continuas en  $[a, b]$  y  $[c, d]$ , respectivamente. Mostrar que si consideramos el rectángulo  $R = [a, b] \times [c, d]$  entonces

$$\iint_R [f(x)g(y)] dx dy = \left( \int_a^b f(x) dx \right) \left( \int_c^d g(y) dy \right).$$

12. Calcular el volumen del sólido acotado por la superficie  $z = \text{sen } y$ , los planos  $x = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $y = \pi/2$  y el plano  $xy$ .

13. Sean  $F \in \mathcal{C}^2$  y  $f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y)$ . Calcular  $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy$  en términos de  $F$ .

14. Graficar las regiones determinadas por los límites de integración de las siguientes integrales y calcular las integrales iteradas.

- (a)  $\int_0^1 \int_0^{x^2} dy dx.$  (g)  $\int_0^1 \int_0^{(1-x^2)^{1/2}} dy dx.$
- (b)  $\int_1^2 \int_{2x}^{3x+1} dy dx.$  (h)  $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos x} y \text{sen } x dy dx.$
- (c)  $\int_0^1 \int_1^{e^x} (x + y) dy dx.$  (i)  $\int_0^1 \int_{y^2}^y (x^n + y^m) dx dy$  ( $m, n > 0$ ).
- (d)  $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} y dy dx.$  (j)  $\int_{-1}^0 \int_0^{2(1-x^2)^{1/2}} x dy dx.$
- (e)  $\int_{-3}^2 \int_0^{y^2} (x^2 + y) dx dy$  (k)  $\int_0^{\pi} \int_0^{\text{sen } y} y dx dy.$
- (f)  $\int_{-1}^1 \int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y} dy dx.$  (l)  $\int_{-2}^0 \int_{x^3}^{x+1} (y^2 + 1) dy dx.$

15. Sea  $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 2y, & \text{si } x \text{ no es racional} \end{cases}$$

Mostrar que la integral iterada  $\int_0^1 \left[ \int_0^1 f(x, y) dy \right] dx$  existe pero  $f$  no es integrable. ¿Existe la otra integral iterada?

16. Calcular el área de:

- (a) la región limitada por la recta  $y = x$  y por la curva  $y = x^2$ .
- (b) la región formada por todos los puntos  $(x, y)$  tales que  $|x| + |y| \leq a$ ,  $a \geq 0$ .

17. Calcular

$$\iint_T (x \operatorname{sen} x + y \operatorname{sen} (x + y)) dx dy$$

siendo  $T$  el triángulo de vértices  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  y  $(3, 3)$ .

18. Sea  $D$  la región acotada por los semiejes positivos de  $x$  e  $y$  y la recta  $3x + 4y = 10$ . Calcular

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy.$$

19. Sea  $D$  la región acotada por el eje  $y$  y la parábola  $x = -4y^2 + 3$ . Calcular

$$\iint_D x^3 y dx dy.$$

20. Calcular el volumen de un cono de base de radio  $r$  y altura  $h$ .

21. Calcular el volumen de las siguientes regiones:

- (a)  $R$ : encerrada por la superficie  $z = x^2 + y^2$  y el plano  $z = 10$ .
- (b)  $R$ : encerrada por el cono de altura 4 dado por  $z^2 = x^2 + y^2$ .
- (c)  $R$ : encerrada por las superficies  $x^2 + y^2 = z$  y  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ .
- (d)  $R$ : determinada por  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 10$  y  $z \geq 2$ .

22. En las integrales siguientes, cambiar el orden de integración, graficar las regiones correspondientes y evaluar la integral por los dos caminos.

(a)  $\int_0^1 \int_x^1 xy dy dx.$

(d)  $\int_{-1}^1 \int_{|y|}^1 (x + y)^2 dx dy.$

(b)  $\int_0^1 \int_1^{2-y} (x + y)^2 dx dy.$

(e)  $\int_{-3}^3 \int_{-(9-y^2)^{1/2}}^{(9-y^2)^{1/2}} x^2 dx dy.$

(c)  $\int_0^1 \int_{2x}^{3x} x^2 y dy dx.$

23. Calcular  $\int_D y^2 x^{1/2} dx dy$  donde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > x^2, y < 10 - x^2\}$$

24. Sea  $D$  la región limitada por las rectas  $y = 2$ ,  $y = \frac{x}{2}$ ,  $y = 2x$  e  $y = 1$ . Calcular la siguiente integral

$$\iint_D x^2 y \, dA$$

25. Sea  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1; \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$  Calcular la siguiente integral

$$\iint_D \cos\left(\frac{x}{y}\right) \, dA$$

26. Calcular  $\int_T e^{x-y} \, dx dy$  donde  $T$  es el triángulo con vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 3)$ , y  $(2, 2)$ .

27. Sea  $T$  la región "triangular" limitada por las rectas  $y = x$ ,  $y = \sqrt{2}$  y la curva  $y = \sqrt{x}$ . Calcular

$$\iint_R e^{\frac{x}{y}} \, dA.$$

## Integrales triples

28. Calcular:

(a)  $\iiint_C (xyz + x^2 y^2 z^2) \, dV$ , donde  $C = [0, 1] \times [-3, 2] \times [-1, 1]$ .

(b)  $\iiint_C (x \cos z + y \cos x + z \cos y) \, dV$ , donde  $C = [0, \pi] \times [0, \pi] \times [0, \pi]$ .

29. Calcular:

(a)  $\iiint_W x \, dV$ , donde  $W$  es la región limitada por,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 2$ ,  $z = x^2 + y^2$ .

(b)  $\iiint_W x^2 \cos z \, dV$ , donde  $W$  es la región limitada por,  $z = 0$ ,  $z = \pi$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x + y = 1$ .

(c)  $\iiint_W \, dV$ , donde  $W$  es la región limitada por,  $z = x^2 + 3y^2$  y  $z = 9 - x^2$ .

(d)  $\iiint_W (x + y + z) \, dV$ , donde  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x, y, z)\| \leq 1\}$ .

(e)  $\iiint_W (x^3 + y + z) \, dV$ , donde  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0, 1], x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

30. Calcular  $\int_0^1 \int_0^{2x} \int_{x+y}^{x^2+y^2} \, dz dy dx$  y graficar la región de integración.

31. Cambiar el orden de integración en

$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^y f(x, y, z) dz dy dx$$

para obtener otras cinco formas de realizar la misma integración. Graficar la región de integración.

32. Sea  $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x, y, z)\| \leq 1\}$ . Demostrar que si  $f$  es una función continua en  $B$ , impar respecto de  $z$  (es decir  $f(x, y, z) = -f(x, y, -z)$ ), entonces  $\iiint_B f(x, y, z) dV = 0$ . ¿Para que otras regiones vale este resultado? (dar ejemplos).

33. Sea  $W$  la región determinada por las condiciones  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$  y  $0 \leq z \leq xy$ .

(a) Hallar el volumen de  $W$ .

(b) Calcular  $\int_W x dx dy dz$ .

(c) Calcular  $\int_W y dx dy dz$ .

(d) Calcular  $\int_W z dx dy dz$ .

(e) Calcular  $\int_W xy dx dy dz$ .