# Práctica 6: Teoremas de la Función Implícita e Inversa

## Teoremas de la Función Implícita e Inversa

1. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal $T(x, y) = (3x - 2y, 5x - 2y)$. Mostrar que $T$ es biyectiva y hallar la expresión de la inversa $T^{-1}$. Calcular $DT^{-1}(a)$ para cada $a \in \mathbb{R}^2$.

2. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por
$$F(x, y) = (x^3y + 3x^2y^2 - 7x - 4y, xy + y)$$
   (a) Demostrar que existe un entorno $U \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $(1, 1) \in U$, un entorno $V \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $(-7, 2) \in V$ y una inversa para $F$, $F^{-1} : V \to U$, $C^1$ tal que $F^{-1}(-7, 2) = (1, 1)$.
   (b) Sean $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función $C^1$ tal que $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = 2$, $\frac{\partial g}{\partial y}(1, 1) = 5$ y $v = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Calcular $\frac{\partial (goF^{-1})}{\partial v}(-7, 2)$.

3. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$. Probar que para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene $\det(DF(x, y)) \neq 0$ pero $F$ no es inyectiva.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como
$$f(x, y) = (yx^{3/2} + (y + 1)^2 - 6\ , (\ln(x) + 5)y - 4)$$
   (a) Probar que existe una inversa de $f$ definida en un entorno del punto $p = (5, 6) = f(1, 2)$, diferenciable en $p$.
   (b) Sean $v = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$, $w = (\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}})$ vectores en $\mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $q = (1, 2)$ tal que $\frac{\partial g}{\partial v}(1, 2) = 4$ y $\frac{\partial g}{\partial w}(1, 2) = 5$. Calcular $D(g \circ f^{-1})(5, 6)$.

5. Para $f(x, y) = x^2 - y^3$ muestre que, sobre la curva de nivel $f(x, y) = 0$, podemos despejar $y$ en función de $x$ (i.e. $y = \phi(x)$). ¿Es $\phi$ de clase $C^1$ en un entorno del cero? ¿Puede aplicarse el teorema de la función implícita en el punto $(0, 0)$?

6. Determinar las derivadas parciales de las funciones que quedan definidas implícitamente en un entorno del punto dado mediante las relaciones
   (a) $f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 - y^2 = 1 \quad a = (2, 0)$
   (b) $g(x, y) = x^5 + y^2 + xy = 3 \quad a = (1, 1)$
   (c) $h(x, y, z) = x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y - 8 = 0 \quad a = (0, 0, 2)$

7. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x,y,z) = x^2y + \ln(y)z - 1$$

   (a) Probar que la ecuación $f(x,y,z) = 0$ define implícitamente una función $y = \varphi(x,z)$ (diferenciable) en un entorno del punto $(x,z) = (1,2)$ tal que $f(x,\varphi(x,z),z) = 0$ para todo $(x,z)$ en dicho entorno.

   (b) Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función diferenciable tal que $Dg(2,-3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y que cumple que $g(2,-3) = (1,2)$. Sea $v = (\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}})$. Calcular $\frac{\partial(\varphi \circ g)}{\partial v}(2,-3)$.

8. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x,y,z) = x^3 - 2y^2 + z^2$$

   (a) Demostrar que $f(x,y,z) = 0$ define una función implícita $x = \varphi(y,z)$ en el punto $(1,1,1)$.

   (b) Encontrar $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(1,1)$ y $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(1,1)$.

9. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$. Probar que si existe $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(p) = 0$ y $\nabla f(p) \neq 0$, entonces $f$ se anula en infinitos puntos de $\mathbb{R}^n$.

## Planos y rectas tangentes a superficies dadas de manera implícita en $\mathbb{R}^3$

10. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la esfera de radio 1 centrada en el origen; es decir, $S$ es la superficie de $\mathbb{R}^3$ definida por $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Mostrar que el vector $v = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es normal a la superficie $S$ en el punto $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e interpretar este hecho geométricamente.

11. Consideremos la superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$. Probar que las rectas

$$\mathbb{L}_1 : t(0,1,1) + (1,0,0) \quad \text{y} \quad \mathbb{L}_2 : t(0,1,-1) + (1,0,0)$$

son ortogonales y están contenidas en $S$. Usar esto para hallar la ecuación del plano tangente a $S$ en $(1,0,0)$.

12. Calcular la ecuación del plano tangente y de la recta normal, cuando existan, a las superficies dadas en los puntos indicados

   (a) $x^{10}y - \cos(z)x + 7 = 0 \qquad x_0 = (7,0,0)$

   (b) $xy - z\ln(y) + e^{xy} = 1 \qquad x_0 = (0,1,1)$

   (c) $xy\ \operatorname{sen}(y) + ze^{xy} - z^2 = 0 \qquad x_0 = (4,0,1)$

   (d) $\cos(x)\cos(y)e^z = 0 \qquad x_0 = (\pi/2,1,0)$

13. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $(x_0,y_0)$ y sea $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función definida por $h(x,y,z) = f(x,y) - z$. ¿Qué relación existe entre el plano tangente al gráfico de $f$ en $(x_0,y_0)$ y el plano tangente a una superficie de nivel de $h$ en $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$?

14. Encontrar los puntos $P = (x_0, y_0, z_0)$ de la superficie

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21\right\}$$

en los que el plano tangente a $S$ sea paralelo al plano $\Pi : x + 4y + 6z = 8$.

15. Sea $E$ el elipsoide definido por la ecuación $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + z^2 = 1$.

    (a) Demostrar que si $P = (a, b, c) \in E$, entonces $-P = (-a, , -b, -c) \in E$

    (b) Demostrar que el plano tangente a $E$ en $P$ es paralelo al plano tangente a $E$ en $-P$.

    (c) Probar que si $P$ y $Q$ son dos puntos distintos de $E$, y el plano tangente a $P$ es paralelo al plano tangente a $Q$, entonces $Q = -P$