Algunas definiciones

- Una transformación lineal $f : V \to V$ es un *proyector* si $f^2 = f$.
- Dada una transformación lineal $f : V \to W$ donde W es de dimensión finita, el *rango* de f es $\operatorname{rg} f = \dim(\operatorname{Im} f)$.
- Una transformación lineal $f : V \to V$ es un *nilpotente* si existe $m \geq 0$ tal que $f^m = 0$.

Ejercicios

1. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Probar que f es un proyector si y solo si $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg}(f - 1_V) = n$.

2.

i) Sean V un espacio vectorial de dimensión n, $S \subseteq V$ un subespacio y $f : V \to V$ un proyector tal que $Im(f) \subseteq S$. Probar que $Im(f) = S \iff Nu(f) \cap S = \{0\}$.

ii) Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_3 = x_1 - x_4 = 0\}$. Hallar un proyector $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $Im(f) \subseteq S$ y $Nu(f) \cap S \neq \{0\}$.

3. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $f : V \to V$ una transformación lineal nilpotente[1]. Supongamos que $f^{n-1} \neq 0$. Probar que existe $v \in V$ tal que $\{v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v)\}$ es una base de V.

Sugerencia: Considerar la cadena de subespacios

$$\{0\} \subseteq \ker f \subseteq \ker f^2 \subseteq \cdots \subseteq \ker f^{n-1} \subseteq \ker f^n = V.$$

4. Sean $B = \{1, X, X^2 + X, X^3 - 2x + 1\}$ y $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ bases de $\mathbb{R}_3[X]$ y $\mathbb{R}^{2\times 2}$ respectivamente, y sea $f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$ la transformación lineal definida por

$$|f|_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) Hallar $f(X^3)$ y $f^{-1}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

ii) Hallar $\operatorname{Nu}(f)$ e $\operatorname{Im}(f)$.

5. Sea $B = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ base de $\mathbb{R}^3$ y sea E la base canónica de ese espacio. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$|f|_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hallar, si es posible, bases B' y B'' de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$|f|_{B'B''} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[1] Esto equivale a que $f^n = 0$, como se verá en el Ejercicio 16 de la Práctica 3.