Álgebra III

Práctica 7 – Segundo Cuatrimestre de 2018

Derivaciones

Ejercicio 1. Sea A un anillo y G un subgrupo finito de automorfismos de del anillo A. Muestre que si $D \in \mathrm{Der}(A)$ y $g \in G$ entonces $g \circ D$ y $D \circ g$ no son necesariamente derivaciones, pero $g \circ D \circ g^{-1}$ sí lo es. Es decir, G actua en $\mathrm{Der}(A)$ via $({}^gD)(a) = g(D(g^{-1}(a))$.

Ejercicio 2. Sea A un anillo y G un subgrupo finito de automorfismos de A. Denotamos

$$\mathrm{Der}(A)^G = \{D \in \mathrm{Der}(A) : gD = Dg\,\forall g \in G\}.$$

Muestre que si $D \in \mathrm{Der}(A)^G$ entonces $D(A^G) \subseteq A^G$.

Ejercicio 3. Sea E un cuerpo y G un grupo finito de automorfismos de de E, sea $K := E^G$. Muestre que la restriccion de E en K define una biyección

$$\mathrm{Der}(E)^G \cong \mathrm{Der}(K).$$

Ejercicio 4. Sea A un anillo, M un A-bimódulo, y $D : A \to M$ una derivación. Muestre que $R := \mathrm{Ker}(D)$ es un subanillo (en particular $D(1) = 0$), y es el máximo subanillo para el cual D es R-lineal (tanto a izquierda como a derecha). Muestre que si $u \in A$ es una unidad, entonces

$$D(u^{-1}) = -u^{-1}D(u)u^{-1}$$

(en particular, si A es conmutativo y M es A-simétrico, $D(1/f) = -D(f)/f^2$). Concluya que $u \in R$ si y sólo si $u^{-1} \in R$.

Ejercicio 5. Sea k un cuerpo de característica p, $\alpha \in \overline{k} \setminus k$ tal que $\alpha^p = \lambda \in k$. Sea $E = k[\alpha]$. Muestre que la aplicación $D : E \to E$ dada por $D(\alpha^i) = i\alpha^i$ $(i = 0, \dots, p-1)$ es una derivación.

Ejercicio 6. Sea k un cuerpo de característiocа $p > 0$ tal que $k^p = k$. Si t es trascendente sobre k, $E = k(t)$ y $d(f) = \partial_t f$, muestre que $\mathrm{Ker}(d) = k(t^p)$. Sea $F = k(u)$ con $u = t^p$, observe que $\partial_u : F \to F$ *no se puede extender* a una derivación de E.

Ejercicio 7. Sea $E = k(x)$ con $D(f) = f'$ y $\mathrm{car}(k) = 0$. Muestre que $\mathrm{Ker}(D) = k$.

Ejercicio 8. Sea $E = k(x, y)$ con x e y alegbraicamente independienets y $D(f) = \partial_x f + y\partial_y f$ (y $\mathrm{car}(k) = 0$). Muestre que $\mathrm{Ker}(D) = k$.

Ejercicio 9. Sean K cuerpo diferencial con subcuerpo de constantes C algebraicamente cerrado de característica cero y A un anillo diferencial que es una extension diferencial de K. Muestre que si A tiene un ideal diferencial, entonces A/I tambien es una extension (de anillos) diferencial de K.

Ejercicio 10. Sea K un cuerpo diferencial y fijemos una ecuacíon diferencial lineal con coeficientes en K de la forma

$$y^{(n)} = a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y.$$

Sea $A := K[y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}]$ el anillo de polinomios en n variables. Muestre que A admite una estructura diferencial que extiende la de K definiendo

$$d(k) = k', \quad \text{si } k \in K$$

$$d(y_i) = y_{i+1} \text{ si } i = 0, \ldots, n-2$$

$$d(y_{n-1}) = a_{n-1}y_{n-1} + \cdots a_1 y_1 + a_0$$

concluya que $E = \mathrm{Frac}(A)$ es un cuerpo diferencial, y que $y_0 \in E$ es solución de la ecuación.

Ejercicio 11. La construcción anterior podría generar nuevas constantes. Muestre por ejemplo que si $f \in K \setminus 0$ es una solución de la ecuación

$$y' = ay$$

y $A = k[y_0]$ es la construcción anterior para este caso, entonces y_0/f es una constante nueva A (y por lo tanto tambien en $E = \mathrm{Frac}(A)$). Muestre algun otro ejemplo con una ecuación de grado dos.

Wronskiano

Sea (K, d) un cuerpo diferencial y consideremos una ecuación de la forma

$$y^{(n)} = a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots a_2 y'' + a_1 y' + a_0$$

con $a_i \in K$. Sea E una extensión diferencial de K que contiene soluciones de la ecuación y que tieen las mismas constantes que K.
Sean $y_1, \ldots y_n \in E$ soluciones de la ecuación y definamos

$$||W|| = ||W(y_1, \ldots, y_n)|| := \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$$

la matriz Wronskiana y el Wronskiano su determinante $W := \det ||W|| \in K$.

Ejercicio 12. Muestre que W satisface la ecuación $W' = a_{n-1}W$.

Ejercicio 13. Si $y_1, \ldots y_n, y_{n+1} \in E$ son soluciones de la ecuación y definimos

$$||\widetilde{W}|| := \det \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n & y_{n+1} \\ y_1' & \cdots & y_n' & y_{n+1}' \\ y_1'' & \cdots & y_n'' & y_{n+1}'' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} & y_{n+1}^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} & y_{n+1}^{(n)} \end{pmatrix} \in K^{(n+1)\times(n+1)}$$

entonces $\det ||\widetilde{W}|| = 0$. Muestre que (eventualmente reoredenando los índices), existen $b_1, \ldots, b_n \in K$ tales que

$$y_{n+1}^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} b_i y_i^{(k)}, \ \forall k = 0, \ldots, n.$$

Más aún, muestre que para todo $k = 0, \cdots n-1$ vale

$$0 = \sum_{i=1}^{n} b_i' y_i^{(k)}.$$

y concluya que si $W \neq 0$ entonces los b_i son constantes y que por lo tanto, la dimensión, sobre el subcuerpo de constantes, del espacio solución, es a lo sumo n.

Producto Tensorial

Ejercicio 14. Complete la demostración de

$$\mathrm{Hom}_k(V \otimes_k W, T) \cong \mathrm{Hom}(V, \mathrm{Hom}_k(W, T))$$

Ejercicio 15. Si V o W es de dimensión finita entonces $V^* \otimes W \cong \mathrm{Hom}_k(V, W)$. El isomorfismo es natural en las dos variables.

Ejercicio 16. Si V es de dimensión finita, bajo el isomorfismo $\mathrm{End}(V) \cong V^* \otimes V$, la evaluación $V^* \otimes V \to k$ dada por $\phi \otimes v \mapsto \phi(v)$ se corresponde con la traza.

Ejercicio 17. Sean $\{v_i\}_{i=1}^n$ y $\{w_j\}_{j=1}^m$ bases de V y W, sea $\{v_i^*\}$ la base dual en V^*, entonces $v_i^* \otimes w_j$ se corresponde con la transformación lineal que en las bases anteriores tiene matriz E_{ij}.

Ejercicio 18. Si A y B son dos k-algebras, entonces $A \otimes_k B$ es una k-algebra.

Ejercicio 19. $k[x] \otimes_k k[x] \cong k[x, y]$.

Ejercicio 20. Si G y H son dos grupos, entonces $k[G] \otimes_k k[H] \cong k[G \times H]$.

Ejercicio 21. Si A, B y C son tres k-algebras conmutativas, muestre que

$$\mathrm{Hom}_{k-alg}(A \otimes_k B, C) \cong \mathrm{Hom}_{k-alg}(A, C) \times \mathrm{Hom}_{k-alg}(B, C).$$

Ejercicio 22. Sean E/k y F/k dos extensiones de k contenidas en un cuerpo C. Muestre que $[EF : k] = [E : k][F : k]$ si y solo si $EF \cong E \otimes_k F$.

Ejercicio 23. Sea A una k-algebra, $A[t]/(t)^2 \cong A \otimes_k (k[t]/(t^2)) = A \oplus At$ con multiplicación

$$(a + bt)(c + dt) = ac + (bc + ad)t.$$

Muestre que $\Phi : A \to A[t]/t^2$ de la forma

$$\Phi(a) = a + D(a)t$$

es un morfismo de k-algebras si y sólo si $D \in \mathrm{Der}_k(A)$.

Separabilidad y derivaciones

Ejercicio 24. Sea $f : R \to S$ un morfismo de anillos, son equivalentes:

1. el morfismo inducido por la multiplicación $S \otimes_R S \to S$ admite una sección S-lineal tanto a izquierda como a derecha.
2. Para todo S-módulo N (en particular es R-módulo via f, el epimorfismo $S \otimes_R N \to N$ se parte (como morfismo de S-módulos), de forma natural en la variable N.

Si una de estas dos condiciones se verifica, diremos que S es separable sobre R (en el sentido no necesariamente conmutativo).

Ejercicio 25. $k \times k$ es separable sobre k, pero $k[x]/(x^2)$ no.

Ejercicio 26. Muestre que $M_n(A)$ es A-separable.

$*$ **Ejercicio 27.** Decidir si $\mathbb{H}$ es separable sobre $\mathbb{C}$.

Ejercicio 28. Sea E/k una extension de cuerpos finita y separable (en el sentido clásico). Muestre que $E \otimes_k \overline{k} \cong \overline{k} \times \cdots \times \overline{k}$ (tantas veces como $[E : k]$). Más aún, muestre que para cada extensión de cuerpos F/k, $E \otimes_k F \cong$ un producto de cuerpos. Si F contiene a la clausura normal de E entonces $E \otimes_k F \cong F \times \cdots \times F$ (tantas veces como $[E : k]$).

Ejercicio 29. Sea E/k una extensión de cuerpos finita. Muestre que E/k es separable (en el sentido clásico) si y sólo si $E \otimes_k E$ tiene a E como sumando directo de manera natural.

Ejercicio 30. Sea E/k finita, muestre que es separable (en el sentido clásico) si y solo si $E \otimes_k E$ no tiene nilpotentes.

Ejercicio 31. Sean $k \to R$ y $R \to S$ dos morfismos de anillos.

1. Muestre que si S es k-separable, entonces S es R-separable.
2. Muestre que si S es R-separable y R es k-separable, entonces S es k-separable.

Ejercicio 32. Sea $R \to S$ un morfismo de anillos, muestre que $\Omega^1_{nc}(S/R) := \mathrm{Ker}(S \otimes_R S \to S)$ es un S bimódulo, y $d : S \to \Omega^1_{nc}(S/R)$ dado por

$$d(a) = 1 \otimes_R a - a \otimes_R 1$$

es una derivación que se anula en R, que tiene la propiedad universal siguiente:
Para todo S-bimódulo M y para toda derivación $D : S \to M$ que se anule en R, existe un morfismo de bimódulos $\widehat{D} : \Omega^1_{nc}(S/R) \to M$ tal que $D = \widehat{D} \circ d$.

Ejercicio 33. Sea A una k-álgebra, muestre que A es k-separable si y sólo si para todo A-bimódulo k siétrico, toda derivación de A en M es interior. (En particular si A es conmutativa, toda derivación k-lineal de A en A es cero.) *Sugerencia:* muestre primero que si A es separable sobre k entonces la derivación universal $A \to \Omega^1_{nc}(A/k)$ es interior.

Ejercicio 34. Sea $R \to S$ un morfismo de anillos *conmutativos*. Muestre que $S \otimes_R S$ es también un anillo (¿qué es lo que falla para ser anillo cuando no son conmutativos?) y la multiplicación $S \otimes_R S \to S$ es morfismo de anillos. Si I es el núcleo, llamamos $\Omega^1_S(R) := I/I^2$, que resulta un S–bimódulo simétrico. Muestre que $d : S \to \Omega^1(S/R)$ dado por

$$d(a) = \overline{1 \otimes_R a - a \otimes_R 1}$$

es una derivación que se anlua en R, que tiene la propiedad universal siguiente:
Para todo S-bimódulo simétrico M y para toda derivación $D : S \to M$ que se anule en R, existe un morfismo S-lineal $\widehat{D} : \Omega^1_R(S) \to M$ tal que $D = \widehat{D} \circ d$.

Ejercicio 35. Sean $k \to R$ y $R \to S$ morfismos de anillos conmutativos. Muestre que existe una sucesión exacta

$$\Omega^1_k(R) \otimes_R S \to \Omega^1_k(S) \to \Omega^1_R(S) \to 0$$

Ejercicio 36. Sea B una k-algebra conmutativa, $J \subset B$ un ideal, y $A = B/J$.
Mostrar que existe una sucesión exacta

$$J/J^2 \to A \otimes_B \Omega^1_k(B) \to \Omega^1_k(A) \to 0$$

donde $J/J^2 \to A \otimes_B \Omega^1_k(B)$ esta dada por $\overline{x} \mapsto 1 \otimes dx$.

Ejercicio 37. $f : V \to W$, $g : V' \to W'$ dos transformaciones lineales, entonces

$$\mathrm{Ker}(f \otimes g : V \otimes V' \to W \otimes W') = \mathrm{Ker}(f) \otimes V' + V \otimes \mathrm{Ker}(g)$$

(la suma no necesariamente es directa!).

Ejercicio 38. Sea A una k-algebra, V un k-espacio vectorial y M un A-modulo a izquierda (en particular M tambien es un k-e.v.). Muestre que existe un isomorfiosmo natural (en M)

$$\mathrm{Hom}_A(A \otimes_k V, M) \cong \mathrm{Hom}_k(V, M).$$

Ejercicio 39. Sea A una k-algebra, entonces la categoria de A-bimódulos k-simétricos se identifica con la de $A \otimes_k A^{op}$-modulos a izquierda, que a su vez se identifica con la de $A \otimes_k A^{op}$-modulos a derecha via

$$(a \otimes b) \cdot m = a \cdot m \cdot b = m \cdot b(\otimes a)$$

donde, estando definido uno de los tres casos, esa igualdad da la definición de los otros dos.

Álgebra libre

Ejercicio 40. Sea V un k-espacio vectorial, se define

$$V^0 := k,\ V^{\otimes 1} = V,\ V^{\otimes n+1} := V^{\otimes n} \otimes V$$

y $TV := \oplus_{n\geq 0} V^{\otimes n}$ con la multiplicación determinada por

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) \cdot (w_1 \otimes \cdots \otimes v_s) := v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes v_s$$

Muestre que TV tiene la siguiente propiedad universal: Para toda transformación lineal $f : V \to A$ donde A es una k-álgebra, existe un unico morfismo $\widetilde{f} : TV \to A$ de k-álgebras tal que $\widetilde{f}|_V = f$. en otras palabras, la restricción a V induce una biyección

$$\mathrm{Hom}_{k-alg}(TV, A) \cong \mathrm{Hom}_k(V, A).$$

Ejercicio 41. Sea V de dimensión 1, digamos $V = k.x$, entonces $TV \cong k[x]$. Si $\dim V \geq 2$ entonces TV no es conmutativa.

Ejercicio 42. Sea $A = TV$ y $A^e := A \otimes_k A^{op}$. Muestre que $\Omega_{nc}(TV)$ es libre sobre A^e de rango $\dim V$, mas precisamente, $\Omega_{nc}(TV) \cong TV \otimes_k dV \otimes_k TV$ (como TV-bimódulo), donde dV es la imagen de V bajo $d : TV \to \Omega_{nc}(TV)$.