Álgebra III

Práctica 4 – Segundo Cuatrimestre de 2018

Teorema de Galois

Ejercicio 1. Hallar elementos primitivos de $E/\mathbb{Q}$, donde E es el cuerpo de descomposición del polinomio:

I) $X^3 - 2$.

II) $(X^2 - 2)(X^2 - 3)$.

III) $X^4 - 2$.

IV) $(X^4 + 1)(X^2 + 5)$.

Hallar los correspondientes grupos de Galois.

Ejercicio 2. Decidir si la extensión $\mathbb{F}_p(X, Y)/\mathbb{F}_p(X^p, Y^p)$ admite un elemento primitivo y calcular el grado de la extensión.

Ejercicio 3. Sea $K = \mathbb{F}_p$,

i) Probar que $\mathrm{Gal}(K(X)/K) \simeq PGL(2, K)$.

ii) Hallar el cardinal de $G := \mathrm{Gal}(K(X)/K)$.

iii) Probar que $K(X)^G = K(Y)$ donde $Y = \frac{(X^{p^2}-X)^{p+1}}{(X^p-X)^{p^2+1}}$.

iv) Probar que el cuerpo fijo por los mapas afines (respectivamente traslaciones) está dado por $K(Y)$ donde $Y = (X^p - X)^{p-1}$ (respectivamente $Y = X^p - X$).

Ejercicio 4. Sea $E = \mathbb{C}(X)$ y sean $f, g \in \mathrm{Gal}(E/\mathbb{C})$ dados por $f(X) = X^{-1}$ y $g(X) = \xi_n X$, donde $\xi_n \in \mathbb{C}$ es una raíz n-ésima primitiva de la unidad. Probar que:

i) $f^2 = g^n = \mathrm{id}_E$ y $fg = g^{-1}f$.

ii) El subgrupo H generado por f y g es isomorfo a D_n.

iii) $E^H = \mathbb{C}(X^n + X^{-n})$.

Ejercicio 5. Sea $E = \mathbb{Q}[\sqrt{2+\sqrt{2}}]$. Probar que $E/\mathbb{Q}$ es normal, calcular su grupo de Galois $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ y determinar todas sus subextensiones.

Ejercicio 6. Determinar todas las subextensiones del cuerpo de descomposición del polinomio $(X^2 - 2)(X^2 - 3)(X^2 - 5)$ sobre $\mathbb{Q}$.

Ejercicio 7. Determinar todas las subextensiones cuadráticas del cuerpo de descomposición de $X^4 - 2X^2 - 1$ sobre $\mathbb{Q}$.

Ejercicio 8. Sea $\Phi_n = \mathrm{m}(\xi_n, \mathbb{Q})$ el n-ésimo polinomio ciclotómico. Sea $K/\mathbb{Q}$ una extensión tal que Φ_n es irredubible en $K[X]$. Probar que $K[\xi_n]/K$ es normal de grado $\varphi(n)$ y que $\mathrm{Gal}(K[\xi_n]/K) \cong \mathcal{U}_n$.

Ejercicio 9. Sean a y b algebraicos sobre K tales que $a^2, b^2 \in K$ y $a, b, ab \notin K$. Caracterizar $\mathrm{Gal}(K[a,b]/K)$.

Ejercicio 10. Sea E/K una extensión Galois tal que $\mathrm{Gal}(E/K) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2$ (n sumandos). Probar que existen $a_1, \ldots, a_n \in E$ tales que $E = K[a_1, \ldots, a_n]$ y $a_i^2 \in K \; \forall\, i$.

Ejercicio 11. Consideremos la extensión $E = \mathbb{Q}[\xi_{11}]/\mathbb{Q}$.

i) Probar que $\mathbb{Q}[\cos(\frac{2\pi}{11})]$ es la única subextensión de grado 5.

ii) Probar que hay una única subextensión de grado 2. Determinarla.

Ejercicio 12. Sea E/K una extensión Galois de grado 15. Probar que E/K tiene solo dos subextensiones propias. Calcular sus grados y ver que dichas subextensiones son normales.

Ejercicio 13. Sea E/K una extensión Galois de grado 45. Probar que si F/K es una subextensión de grado 3 de E/K, entonces es normal.

Ejercicio 14. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo y sea E/K una extensión Galois de grado $p^n s$ con $n, s \in \mathbb{N}$ y $p \nmid s$. Probar que:

i) E/K tiene subextensiones de grado s y todas ellas son isomorfas.

ii) Si $p > s$ entonces hay una única subextensión de grado s, que además, resulta ser normal.

Ejercicio 15. Sea L/K una extensión y sean E/K y F/K dos subextensiones algebraicas. Probar que EF/K es abeliana si y solo si E/K y F/K son abelianas.

Ejercicio 16. Sea E/K una extensión algebraica. Probar que existe una subextensión L/K abeliana maximal (es decir, que contiene a todas las subextensiones abelianas). ¿Cual es en el caso en que E es el cuerpo de descomposición de $X^4 + 2$ sobre $\mathbb{Q}$?

Ejercicio 17. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ irreducible de grado mayor o igual a 2 y con una única raíz real. Sea E el cuerpo de descomposición de f sobre $\mathbb{Q}$. Probar que $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ no es abeliano.

Ejercicio 18. Sea $K/\mathbb{Q}$ una extensión de Galois de grado 4 tal que $\sqrt{-3} \in K$. Caracterizar la clase de isomorfismo de $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$.

Ejercicio 19. Sea E el máximo cuerpo dentro de $\overline{\mathbb{Q}}$ que no contiene a $\sqrt{2}$ (¿Por qué existe tal cosa?). Probar que toda extensión finita de E es de Galois y con grupo de Galois cíclico.

Ejercicio 20. Sea $\alpha = \sqrt{6+3\sqrt{3}} + \sqrt{6-3\sqrt{3}}$. Hallar $\mathrm{m}(\alpha, \mathbb{Q})$ y deducir $\mathrm{Gal}\left(\mathbb{Q}\left[\sqrt{6+3\sqrt{3}}\right]/\mathbb{Q}\right)$.

Ejercicio 21. Hallar $\mathrm{Gal}(\mathrm{Desc}(f|K))$ para

1. $f = X^4 - 5X^2 + 3$, $K = \mathbb{F}_3, \mathbb{Q}_3$ y $\mathbb{Q}$.
2. $f = X^4 - 7X^2 + 2$, $K = \mathbb{F}_5, \mathbb{Q}_5$ y $\mathbb{Q}$.
3. $f = X^4 - uX^2 + 1 - u$, $K = \mathbb{C}((u))$ y $\mathbb{C}(u)$.
4. $f = X^4 + (1-u)X^2 + u$, $K = \mathbb{C}((u))$ y $\mathbb{C}(u)$.

Ejercicio 22. Se define el *discriminante* de $f(X) = a_n \prod_{i=1}^{n}(X - z_i)$ como

$$\Delta(f) := a_n^{2n-2} \prod_{i<j}(z_i - z_j)^2.$$

1. Probar que si $f \in \mathbb{K}[X]$ entonces $\Delta(f) \in K$.
2. Probar que si $f \in \mathbb{R}[X]$ tiene todas sus raíces reales, entonces $\Delta(f) \geq 0$.
3. Si f es mónico, probar que $\Delta(f) = (-1)^{\binom{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} f'(z_i)$.
4. Probar que si $f = X^3 + pX + q$ entonces $\Delta(f) = -4p^3 - 27q^2$.

$*$ 5. Probar que si $f = X^4 + cX^2 + dX + e$ entonces

$$\Delta(f) = -4c^3d^2 + 16c^4e - 27d^4 + 144cd^2e - 128c^2e^2 + 256e^3.$$

6. Probar que si $f = X^n + aX + b$ entonces

$$\Delta(f) = (-1)^{\binom{n}{2}} \left(n^n b^{n-1} + (1-n)^{n-1} a^n\right).$$

7. Probar que el discriminante es invariante por las transformaciones

   a) $f(X) \mapsto X^{\mathrm{gr}(f)} f(X^{-1})$. *b)* $f(X) \mapsto f(X + b)$ con $b \in \mathbb{K}$.

8. Sea $a \in \mathbb{K}^\times$, probar que $\Delta(f(aX)) = a^{n(n-1)}\Delta(f(X))$.

$*$ 9. Calcular $\Delta(f)$ para

$$f(X) = \frac{(n-1)^{n-1}X^n - n^n(X-1)^{n-1}}{(X-n)^2}.$$

Sugerencia: considerar $X = nY/(nY - (n-1))$.

Ejercicio 23. Sea $f = X^3 + pX + q \in \mathbb{F}_\ell[X]$ irreducible, con ℓ potencia de un número primo. Probar que $-4p^4 - 27q^2 \in \mathbb{F}_\ell$ es un cuadrado perfecto.

Ejercicio 24. Sea $f(X) \in K[X]$ mónico irreducible tal que $f(0) \notin K^p$ con $p > 2$ primo. Probar que $f(X^p)$ es irreducible en $K[X]$.

Ejercicio 25. Para cada caso, calcular el grupo de Galois de los cuerpos de descomposición de f sobre $\mathbb{Q}$, y calcular todas las subextensiones intermedias.

I) $f = x^4 + 7$. III) $f = x^6 + 3$. V) $f = x^3 - 18x + 36$.

II) $f = x^6 - 3$. IV) $f = x^4 + 4x^2 + 2$. VI) $f = x^6 + 5x^3 + 7$.

Ejercicio 26. Sea $E = \mathbb{Q}\left(\sqrt{(2+\sqrt{2})(3+\sqrt{3})}\right)$.

1. Probar que $E/\mathbb{Q}$ es normal y hallar su grupo de Galois.
2. Decidir si $\sqrt{6+\sqrt{6}} \in E$.

Ejercicio 27. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ irreducible de grado 3. ¿Es posible que $i \in \mathrm{Desc}(f|\mathbb{Q})$?