Álgebra II - 2do Cuatrimestre 2018

Ejercicios - Clase Pública 28/8

1. Probar que los siguientes conjuntos son generadores de $\mathbb{S}_n$.
   - $\langle (i\ j) : 1 \leq i < j \leq n \rangle$.
   - $\langle (1\ i) : 1 \leq i \leq n \rangle$.
   - $\langle (i\ i+1) : 1 \leq i \leq n \rangle$.
   - $\langle (1\ 2), (1\ 2\ 3\ 4 \ldots n) \rangle$.
2. Sea $\sigma \in \mathbb{S}_n$. Probar que $\sigma(a_1 a_2 \ldots a_n)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1)\sigma(a_2) \ldots \sigma(a_n))$.
3. Sea G un grupo. Caracterizar a partir de los elementos de G el conjunto $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G)$.
4. Sean G un grupo y X un conjunto. El conjunto G^X viene equipado con una operación natural $(f_1 \star f_2)(h) = f_1(h) \cdot_G f_2(h)$. Probar que dicha operación hace de G^H un grupo. ¿Qué relación hay entre $\mathrm{Hom}(H, G)$ y G^H?
5. Probar que $\mathbb{Z}/n \cong G_n$.
6. Probar que los elementos de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/2)$ permutan los elementos no nulos de $(\mathbb{Z}/2)^2$. Concluir que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{S}_3$.
7. Sean G y H dos grupos y $S \subseteq G$ un subconjunto de genereadores. Probar que si $\varphi : G \to H$ es un isomorfismo, entonces $\varphi(S)$ es un conjunto de generadores de H. Si $T \subseteq H$ es un conjunto de generadores de H y $f : G \to H$ un morfismo de grupos tal que $f(S) = H$, ¿es f un isomorfismo?
8. Probar que el grupo dihedral-4 $\mathbb{D}_4$ y el grupo cuaterniónico $\mathcal{H}$ no son isomorfos.