Álgebra II
Práctica 8 - Módulos libres, producto tensorial, teorema de estructura.

1. Sea M un A-módulo. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

i) De todo sistema de generadores de M puede extraerse una base.
ii) Todo conjunto linealmente independiente en M puede extenderse a una base.
iii) Todo módulo es libre.
iv) Todo submódulo de un módulo libre es libre.
v) Si $x \in M$ es no nulo entonces $\{x\}$ es linealmente independiente.
vi) Existen módulos libres con elementos no nulos que son linealmente dependientes.
vii) Existen módulos no libres tales que todo elemento no nulo es linealmente independiente.
viii) Si A es un anillo íntegro y M es un A-módulo libre entonces todo elemento no nulo de M es linealmente independiente.

2. Probar que $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/(n:m)\mathbb{Z}$.

3. Sea A un anillo conmutativo. y M un A-módulo.

i) Sean I, J ideales de A. Probar que $A/I \otimes_A A/J \simeq A/(I+J)$ via $\overline{a} \otimes \overline{b} \mapsto \overline{ab}$.
ii) Sea M un A-módulo e I un ideal de A. Probar que $(A/I) \otimes_A M \simeq M/IM$ via $\overline{a} \otimes x \mapsto \overline{ax}$.

4. Sea A un dominio íntegro. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas

i) Si M es un A-módulo libre entonces es sin torsión.
ii) Si $f : M \longrightarrow N$ es un morfismo de A-módulos y M es de torsión entonces $\mathrm{Im}(f)$ es de torsión.
iii) Si $f : M \longrightarrow N$ es un morfismo de A-módulos y M es sin torsión entonces $\mathrm{Im}(f)$ es sin torsión

5. Sea A un dominio íntegro, sea M un A-módulo y $S < M$. Probar que $t(S) = S \cap t(M)$.

6. Calcular $t(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

7. Sea A un dominio íntegro y sean M y N A-módulos. Probar que

i) Si N es sin torsión entonces $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ es sin torsión
ii) Si M es de torsión y N es sin torsión entonces $\mathrm{Hom}_A(M,N) = 0$.

8. Sea A un dominio íntegro y sea $(M_i)_{i\in I}$ una familia de A-módulos. Probar que

i) $t(\times_{i\in I} M_i) \subseteq \times_{i\in I} t(M_i)$.
ii) $t(\oplus_{i\in I} M_i) = \oplus_{i\in I} t(M_i)$.

9. Sea A un dominio íntegro, y M, N A-módulos. Entonces M ó N de torsión $\Rightarrow M \otimes_A N$ es de torsión.

10. Clasificar los grupos abelianos de orden 16, 27 y p^6 (p primo).

11. Sea G un grupo abeliano de orden p^5, con p primo. Calcular los posibles órdenes del subgrupo $\{x \in G \,/\, x^p = 1\}$.

12. Clasificar los grupos abelianos de orden 6, 12, 18, 45, 50, 100 y 180.

13. Caracterizar los grupos abelianos finitos tales que

i) Todo subgrupo propio de G es cíclico.

ii) Todo subgrupo propio de G es de orden primo.

iii) Todo subgrupo propio no nulo de G es maximal.

iv) Para todo par de subgrupos S y T de G, $S \subseteq T$ o $T \subseteq S$.

v) El orden de todo elemento no nulo de G es primo.

vi) G/S es cíclico para todo subgrupo S no nulo de G.

14. Calcular los factores invariantes de los siguientes grupos

i) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.

ii) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/14\mathbb{Z}$.

iii) G un grupo abeliano de orden 36 que tiene exactamente 2 elementos de orden 3 y que no tiene elementos de orden 4.

iv) G un grupo abeliano de orden 225 que tiene por lo menos 40 elementos de orden 15 y tal que todo subgrupo de orden 9 de G es isomorfo a $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

15. Sea G un grupo abeliano de orden n. Probar que para todo divisor d de n, G tiene un subgrupo de orden d

Sea $(G\,,\,.)$ un grupo finito. Se define el exponente de G como

$$\exp(G) = \min\{n \in \mathbb{N} \,/\, x^n = 1 \;\forall\, x \in G\}$$

16. i) Probar que si G es un grupo abeliano finito entonces $\exists\, x \in G \,/\, \mathrm{ord}(x) = \exp(G)$. ¿Qué pasa si G no es abeliano?

ii) Sea $n \in \mathbb{N}$. ¿Para qué divisores d de n existe un grupo abeliano de orden n y de exponente d?

iii) Caracterizar los grupos abelianos finitos de orden menor o igual que 100 de exponente 9, 20 y 21.

17. i) Sea G un grupo abeliano finito y sea p un primo que divide al orden de G. Probar que el número de elementos de orden p en G es coprimo con p.

ii) Para cada grupo abeliano G de orden pq^2 (p y q primos distintos) determinar cuántos elementos de orden pq y cuántos elementos de orden pq^2 hay en G.