Álgebra II
Práctica 7 - Módulos de tipo finito, Noetherianos, sucesiones exactas, etc.

A lo largo de esta práctica A-módulo significa A-módulo a izquierda.

1. Probar que los grupos abelianos $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{Q}_{>0}$ y $\mathbb{R}_{>0}$ no son de tipo finito.

2. Sea M un A-módulo no nulo de tipo finito. Probar que si $\mathcal{S}$ es un sistema de generadores de M entonces existen $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{S}$ tales que $M = Ax_1 + \cdots + Ax_n$.

3. Sea A un anillo, sea M un A-módulo y sea $\mathcal{S}$ un sistema de generadores de M. Decimos que $\mathcal{S}$ es un *sistema de generadores minimal* de M si ningún subconjunto propio de $\mathcal{S}$ es un sistema de generadores de M.

i) Probar que todo A-módulo de tipo finito posee un sistema de generadores minimal

ii) Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe en el grupo abeliano $\mathbb{Z}$ un sistema de generadores minimal con n elementos.

4. Sea A un anillo y sea M un A-módulo. Diremos que M es *localmente cíclico* si todo submódulo de M de tipo finito es cíclico.

i) Probar que Todo submódulo de un módulo localmente cíclico es localmente cíclico.

ii) Probar que si M es localmente cíclico y $f : M \longrightarrow N$ es un epimorfismo de A-módulos entonces N es localmente cíclico.

iii) Probar que $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ son grupos abelianos localmente cíclicos pero no son de tipo finito.

5. Sea A un dominio íntegro y sea $a \in M_n(A)$. Para cada $1 \leq j \leq n$ sea $v_j = (a_{1j}, \ldots, a_{nj}) \in A^n$. Probar que

i) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

ii) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es un sistema de generadores de A^n si y sólo si $\det(A) \in \mathcal{U}(A)$.

6. Sea A un anillo y sea M un A-módulo. Probar que si todo conjunto no vacío de submódulos de tipo finito de M tiene un elemento maximal entonces M es Noetheriano.

7. Dar un ejemplo de

i) un A-módulo de tipo finito que no sea Noetheriano.

ii) Un A-módulo tal que todo submódulo propio sea de tipo finito y que no sea Noetheriano.

8. Probar que un K-espacio vectorial V es Noetheriano si y sólo si $\dim_K(V) < \infty$.

9. Sea A un anillo y sea M un A-módulo. Sea $f \in \mathrm{End}_A(M)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $K_n = \mathrm{Nu}(f^n)$, $I_n = \mathrm{Im}(f^n)$. Probar que

i) $K_1 = K_2 \Rightarrow K_1 \cap I_1 = 0$.

ii) $I_1 = I_2 \Rightarrow K_1 + I_1 = M$.

iii) Si M es Noetheriano entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $K_n \cap I_n = 0$.

iv) Si M es Noetheriano y f es un epimorfismo entonces f es un automorfismo.

10. Sea $d \in \mathbb{Z}$ y sea $\sqrt{d}$ una raíz cuadrada de d en $\mathbb{C}$. Sea $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ el submódulo de $\mathbb{C}$ formado por los elementos de la forma $a + b\sqrt{d}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$. Probar que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ es Noetheriano.

11. Probar que no existe un epimorfismo de grupos

i) de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ en $\mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

ii) de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$.

iii) de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

12. Sea p un primo. Probar que no existe una sección

i) de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.

ii) de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.

iii) de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.

13. Calcular

i) $\mathrm{Hom}(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\,,\, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

ii) $\mathrm{Hom}(\bigoplus_{p\ primo} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\,,\, G_3)$.

14. Sea $M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ y sea $H = \{(a, b, c) \in M \,:\, 2 \mid a + b + c \text{ y } 3 \mid b\}$.

i) Caracterizar M/H.

ii) Probar que H no es un sumando directo de M.

15. Sea M un A-módulo y sean S y T submódulos de M. Probar que $M \sim S \oplus T$ si y sólo si existe $p : M \longrightarrow M$ proyector ($p^2 = p$) tal que $S = \mathrm{Nu}(p)$ y $T = \mathrm{Im}(p)$.

16. Sea $(M_i)_{i\in I}$ una familia de A-módulos. Probar que $\bigoplus_{i\in I} M_i$ es Noetheriano si y sólo si M_i es Noetheriano $\forall\, i \in I$ y $M_i = 0$ para casi todo $i \in I$.

17. Sea G un grupo abeliano y sean S y T subgrupos de G tales que $G \sim S \oplus T$. Probar que si existe un monomorfismo de $\mathbb{Q}$ en G entonces existe un monomorfismo de $\mathbb{Q}$ en S o existe un monomorfismo de $\mathbb{Q}$ en T.

18. i) Sea $p : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ un morfismo de grupos. Probar que p es un proyector si y sólo si $\exists\, a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tal que $n \mid a^2 - a$ y $p(x) = a \cdot x$ para todo $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

ii) Sea $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, sea $f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ el morfismo definido por $f(x) = a \cdot x$ y sea $d = (a : n)$. Probar que $\mathrm{Nu}(f) = \mathbb{Z}\frac{n}{d}$ y que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{Z}\, d$.

iii) Sean $n, d \in \mathbb{Z}$. Probar que si $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, con $p_1, \dots, p_r$ primos positivos distintos y $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}$, entonces $d = (a : n)$ para algún $a \in \mathbb{Z} \,:\, n \mid a^2 - a$ si y sólo si $d = p_1^{\beta_1\cdot\alpha_1} \dots p_r^{\beta_r\cdot\alpha_r}$ con $\beta_i \in \mathbb{N}_0$, $0 \le \beta_i \le 1$.

iv) Encontrar los sumandos directos de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ y, para cada uno de ellos, determinar un suplemento.

19. Sea

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & f' \downarrow & & f \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

un diagrama conmutativo de A-módulos, con filas exactas. Probar que existe una única $f'' : M'' \longrightarrow N''$ que completa el diagrama conmutativo y que, si f y f' son isomorfismos, entonces f'' es un isomorfismo.

20. Sea $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de A-módulos. Probar que N es Noetheriano si y sólo si M y P son Noetherianos.

21. Lema de los cinco: sea

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\ \alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \gamma\downarrow & & \delta\downarrow & & \varepsilon\downarrow \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' \end{array}$$

un diagrama conmutativo de A-módulos, con filas exactas. Probar que si α, β, δ y ε son isomorfismos entonces γ es un isomorfismo.

22. Sea A anillo conmutativo y N, N', N'' A-módulos.

i) Probar que la sucesión
$$0 \longrightarrow N \longrightarrow N' \longrightarrow N''$$
es exacta si y sólo si para todo A-módulo M, la sucesión
$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,N') \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,N'')$$
es exacta.

ii) Probar que la exactitud de
$$0 \longrightarrow N \longrightarrow N' \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$$
no implica siempre la exactitud de
$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,N') \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,N'') \longrightarrow 0.$$

23. Sea A un anillo conmutativo y M, N_i, $i \in I$, A-módulos. Probar que
$$\mathrm{Hom}_A(M, \underset{i\in I}{\times} N_i) \simeq \underset{i\in I}{\times} \mathrm{Hom}_A(M, N_i).$$

24. Un A-módulo M se dice *simple* si $M \neq \{0\}$ y sus únicos submódulos son $\{0\}$ y M.

i) Probar que un A-módulo M es simple si y sólo si $M \neq \{0\}$ y $A \cdot x = M \ \forall\, x \in M$ tal que $x \neq 0$.

ii) Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de A-módulos. Probar que
   (a) Si M es simple entonces $f = 0$ o f es un monomorfismo.
   (b) Si N es simple entonces $f = 0$ o f es un epimorfismo.
   (c) Si M y N son simples entonces $f = 0$ o f es un isomorfismo.

25. Sea M un A-módulo. Probar que $\mathrm{End}_A(M) = \mathrm{Hom}_A(M,M)$ con la suma definida por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ y la composición de funciones es un anillo y que, cuando M es simple, $\mathrm{End}_A(M)$ es un anillo de división